

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 1b.

Wiskunde en Research, 2.

Wat heeft wiskunde met olie te maken?
Mathematische structuur van de draag-
vlak theorie.

Toepassing der varians-analyse bij de
verwerking der uitkomsten van biologische
proefnemingen.

Waerden B.L. van der, Greidanus J.H., Laan E. van der.



1947

Inhoudsopgave

Wiskunde en Research, 2.

B.L. van der Waerden	Wat heeft wiskunde met olie te maken? 03.05.1947.	2	pag.
J.H. Greidanus	Mathematische structuur van de draagvlak- theorie. 10.05.1947.	30	"
E. van der Laan	Toepassing der varians-analyse bij de verwerking der uitkomsten van biologische proefnemingen. 17.05.1947.	6+2	"

WAT HEEFT WISKUNDE MET OLIE TE MAKEN?

een ingenieur stelde mij als student het volgende probleem:

Warmtegeleiding in een koperen hollen cylinder.

Binnentemperatuur T_1 , buiten T_2 .

$T = 0$ voor $t = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

In de meeste boeken over differentiaalvergelijkingen staat geen methode om dit probleem op te lossen. Boeken als Riemann-Weber en Courant-Hilbert kende ik niet.

Het is noodig, de studenten de weg naar deze werken te wijzen. Bij de B.P.M. werden wij herhaaldelijk voor dergelijke problemen gesteld.

Schets oplossing: $T = T_0 + \sum c_n \rho_n e^{-a \lambda_n^2 t}$

waarin T_0 de van t onafhankelijke oplossing, die na oneindig lange tijd bereikt wordt; de ρ_n zijn de eigenfuncties van het probleem

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \lambda^2 \rho = 0 \quad \rho = 0 \text{ voor } z = 0 \text{ en } z = R$$

Deze zijn Besselsche functies, in 't geval van een vlakke plaat gewone sinus-functies. De coëfficiënten c_n moeten zoo bepaald worden, dat aan de beginvoorwaarde

$$-T_0 = \sum c_n \rho_n$$

voldaan is. Dus een probleem van Fourierreeksen: Ontwikkeling van willekeurige functies naar eigenfuncties. Ook voor de quantenmechanica uiterst belangrijk.

Olieproblemen. Indeling: 1. Olie-exploratie
2. Olieproductie
3. Olieverwerking

1. Exploratie

Gravimetrische, magnetische en seismische methoden.

De seismiek berust geheel op de meetkundige optica. Een kunstmatige aardbeving wordt verwekt en uit de tijden van aankomst van de teruggekaatste en gebroken golven besluit men, hoe diep de aardlagen liggen. Moeilijk probleem: Berekening van de energie der verschillende soorten teruggekaatste en gebroken golven.

Methoden door Sommerfeld, Weyl, Niesen en van der Pol voor radiogolven uitgewerkt, door Cagniard en anderen op seismische golven overgebracht.

2. Olieproductie

Moet men de gaten wijd uit elkaar of dicht bij elkaar boren? Moet men langzaam aftappen of snel? Oplossing alleen theoretisch mogelijk door studie van vloeistof- en gasstroming door poreuze lagen. Niet-lineaire differentiaalvergelijking. Benadering door differentievergelijking. Moeilijkheden bij de benadering en hoe ze overwonnen werden.

3. Olieverwerking.

Destillatie en chemische verwerking. In het laboratorium in Amsterdam werken honderden chemici en tientallen physici en biologen (insecten-dodende middelen). Allen zitten wel eens met wiskundige problemen.

Technische problemen: Warmtegeleiding, automatische regeling.

Hoe kan ik een storing van temperatuur of druk in de kortst mogelijke tijd tot nul reduceeren? Begrippen: responsie van regelaar, responsie van bedrijf. Hulpmiddel: Laplacetransformatie (Operatorenrekening). Warmtegeleiding bij smeerolie leidde tot niet-lineaire integraalvergelijking.

Chemische problemen, vooral fysische chemie.

Reactieverloop, warmteontwikkeling, vloeistofstromingen, turbulentie.

Fluid catalyti-probleem gaf aanleiding tot de vraag: Als een aantal harde bollen volgens toeval in een ruimte verdeeld zijn, aan welke schommelingen zijn dan de afstanden tusschen naburige deeltjes onderhevig? Problemen van de statistische mechanica van gassen en vloeistoffen hangen hiermee samen.

Problemen van mathematische statistiek.

Cursus hierover gehouden in Amsterdam, groote belangstelling bij physici en biologen. Foutentheorie van Gauss, met moderne Engelsche verfijningen van Student en Fisher. IJking van instrumenten. Theorie van kleine en groote steekproeven: aan welke toevallige schommelingen zijn deze onderhevig? Mortaliteitskrommen van insectendoderende middelen; hoe deze zoo nauwkeurig mogelijk te bepalen.

Mathematische structuur van de draagvlaktheorie.
door drs. J.H. Groidanus.

Dit rapport is opgesteld ten behoeve van een voordracht voor
het "Mathematisch Centrum".

<u>Indeeling.</u>	<u>Blz.</u>
<u>1</u> Inleiding.	1
<u>2</u> Grondslagen der mathematische formulering.	1
<u>3</u> Verwaarloozing der eindige wrijving.	3
<u>4</u> Vereenvoudigingen.	5
<u>5</u> De hoofdstelling van de draagvlaktheorie.	9
<u>6</u> Profieltheorie.	15
<u>7</u> Supersone profieltheorie.	18
<u>8</u> Berekening der roerwerking.	21
<u>9</u> Het draagvlak met eindige spanwijdte bij stationnaire onstrooming.	22
<u>10</u> Instationnaire draagvlaktheorie.	25
<u>11</u> Grenslagen aan draagvlakken.	27
<u>12</u> Slotbeschouwing.	30

1 Inleiding.

De hoofdpoging van de draagvlaktheorie bestaat uit het vaststellen van de aerodynamische - d.i. door de luchtstromingen veroorzaakte - krachten, die werken op een door lucht op als gegeven te beschouwen wijze voortbewogen vliegtuigvleugel van eveneens gegeven vorm. Deze provisorische probleemstelling houdt niet alles in wat voor den vliegtuigconstructeur ten aanzien van de aerodynamica van den vleugel van belang is. Een vliegtuig bestaat behalve uit een vleugel tevens uit een romp en motoren met schroeven en andere onderdeelen. Deze beïnvloeden de strooming om het geheel, zoodat men, ook wanneer men alleen let op de luchtkrachten die op den vleugel zelf werken, iets anders krijgt wanneer men een "vleugel-alleen" door de lucht voortbeweegt, dan wel een vleugel, gecompleteerd met een romp, motoren, schroeven, enz. In de praktijk onderzoekt men echter met meer of minder recht en succes de wijzigingen, die meebewogen, niet tot den eigenlijken vleugel behoorende onderdeelen in de op den vleugel werkende luchtkrachten veroorzaken, afzonderlijk. De hierin vervatte vraagstukken vormen het z.g. interferentieprobleem, waaraan wij hier geen aandacht zullen besteden. Wij veronderstellen derhalve voor het vervolg, dat wij inderdaad uitsluitend met een vliegtuigvleugel te doen hebben.

Een tweede complicatie kan in de "lucht" schuilen. In de atmosfeer kunnen nl. stroomingen optreden, die op zichzelf niets met den vleugel te maken hebben, b.v. "onregelmatige" horizontale of verticale winden. Zij veroorzaken "remousstooten" op den vleugel en vormen een uitvoerig, doch eveneens grootendeels afzonderlijk onderzocht, nevenverschijnsel. Ook dit zullen wij niet aansnijden, zoodat wij de probleemstelling in dien zin zullen preciseeren, dat wordt verondersteld dat in de lucht waardoor de vleugel wordt voortbewogen géén stroomingen optreden, die niet direct door deze gebeurtenis zelve worden veroorzaakt. Wij veronderstellen m.a.w., dat de atmosfeer op zichzelf volmaakt rustig is.

2 Grondslagen der mathematische formuleering.

21 Het draagvlak.

Hoewel iedereen wel weet, hoe een vliegtuigvleugel er ongeveer uit ziet, lijkt het goed enkele karakteristieke punten van conventionele vleugels even aan te stippen.

In technische termen is een vliegtuigvleugel een meer of minder dikke, nagenoeg vlakke plaat, die er in bovenaanzicht ongeveer overeenkomstig fig.1 uit ziet (2 voorbeelden).

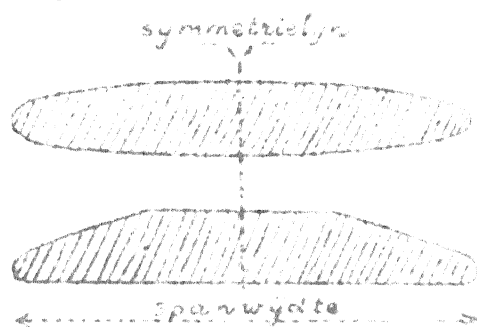


fig.1

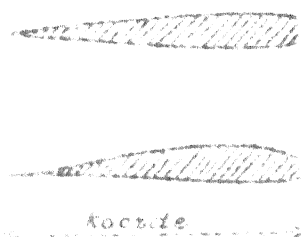


fig.2

De dwarsdoorsnede, d.i. het "profiel", heeft in principe den vorm van fig.2 (oveneens 2 voorbeelden). Dat dit betreft zijn echter complicaties van het in fig.3 geschetste type mogelijk en van zeer wezenlijk

Behalve in het geval van vleugelsystemen, b.v. tweedekkers, die men dikwijls niet in onderdeelen scheidt, doch direct, met wisselwerking en al, onderzoekt.

ang. De achterrand van het draagvlak is immer een "schorpe rand".

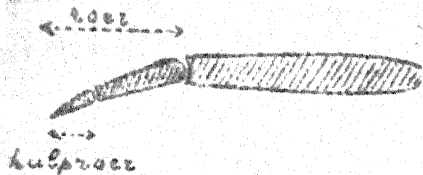


fig. 3



fig. 4

Karakteristiek zijn

- a overeenk. fig. 1: een groote "slankheid", d.i. de verhouding $\frac{\text{spanwijdte}}{\text{gemidd. koorde}} \gg 1$ (orde v. grootte: 10).
- b overeenk. fig. 2: een goede "stroomlijnvorm" en beperkte verhouding $\frac{\text{grootste dikte}}{\text{koorde}}$ (orde v. grootte: $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$).
- c (eventueel) overeenk. fig. 3 kleine, de stroomlijnvorm niet ernstig bedovende roerhoeken. Deze roerhoeken behoeven niet noodzakelijk constant te zijn.

Voor de wijze van voortbewegen is voorts karakteristiek, dat

- d overeenk. fig. 4 de resulteerende voortbewegingsrichting een kleinen (niet noodzakelijk constanten) hoek maakt met de "lange profiel-assen". Daarenboven zullen wij aannemen, dat zij in het symmetrievlak valt (hetgeen niet noodzakelijk het geval is; men kan het draagvlak "scheef" door de lucht voortbewegen).

Verder kunnen een geringe V-vorm en een kleine "wrong" aanwezig zijn.

22 De stroomende lucht.

In de theoretische physica wordt op grondslag van de kinetische gastheorie aangetoond, dat men een gas, voor wat betreft de mechanica van zijn stroomingstoestanden, kan opvatten als een "samendrukbare visceuse vloeistof". Derhalve luidt de bewegingsvergelijking van een vloeistofelementje met het volume τ ,

$$\rho \tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = - \int_F p \vec{n} d\vec{f} - \tau \int_F \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} d\vec{f} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{dichtheid} \\ p = \text{druk} \\ \eta = \text{viscositeit} \\ \vec{n} = \text{opperv. elementje} \end{array} \right. \quad (1)$$

De rechte D 's in den operator $\frac{D}{Dt}$ duiden erop, dat men bij het bepalen van den afgeleide één zelfde vloeistofdeeltje in zijn beweging moet volgen en dus niet op één vast punt van het veld moet letten.

Uit (1) volgt op bekende wijze de differentiaalvergelijking

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} = - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla = \text{vector operator} \\ \nabla^2 = \text{Laplace operator} \\ \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{scalair product} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = \text{dyadisch product} \end{array} \right. \quad (2)$$

Daarboven geldt de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

De vergelijking (2) is een vectorvergelijking en equivalent met 3 scalaire vergelijkingen. Tezamen met de scalaire vergelijking (3) hebben wij dus nu 4 vergelijkingen voor de vijf onbekende functies

$$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \rho, \varphi.$$

Nemen wij nu aan dat de compressies en expansies, veroorzaakt door "het groote snelheid" voortbewogen draagvlak zóó snel verlopen, dat het langzame proces der warmtegeleiding geen gelegenheid krijgt, de uitsluitend door deze compressies en expansies veroorzaakt te veronderstellen temperatuurvariatiën te beïnvloeden (hetgeen inhoudt dat wij aannemen niet met een verhit draagvlak te doen te hebben, zooals bij koelingsproblemen het geval zou kunnen zijn), dan kan als vijfde vergelijking de wet der adiabatische toestandveranderingen

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \text{const. v.d. soort warmten} \quad (4)$$

dienst doen. Voor ρ en φ kunnen de druk, resp. dichtheid worden genomen in een vast veldpunt op grooten afstand van het draagvlak (d.i. in een punt waar geen merkbare strooming optreedt).

Bij het thans complete stel differentiaalvergelijkingen behooren randvoorwaarden. Deze schrijven voor, dat aan de randen van het veld, dat is aan het oppervlak van het draagvlak (het veld strekt zich buiten het draagvlak in het algemeen alzijdig tot in het oneindige uit),

$$\gamma_n = 0; \quad \gamma_{\text{tang}} = 0 \quad (5)$$

De eerste voorwaarde is van physisch standpunt evident. De tweede geeft een bekende eigenschap der viscouze, d.i. klevende, vloeistoffen weer.

23 Een vluchtige blik op de bovenvermelde grondvergelijkingen der aerodynamica is reeds voldoende om tot de overtuiging te geraken, dat het hierdoor in zijn algemeensten vorm geformuleerde mathematische vraagstuk afzichtelijk gecompliceerd is. De vergelijkingen zijn nl. niet lineair en van hooge orde. Het is direct duidelijk dat, zou men vier onbekenden - bv. $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ en φ - elimineeren, men een onduidelijk gecompliceerde niet lineaire partieele differentiaalvergelijking voor de vijfde onbekende - den druk - zou overhouden.

3 Verwaarloozing der invendige wrijving.

31 De viscositeit van lucht is zeer klein. Hierin ligt een uitnoodiging opgesloten, haar ter vereenvoudiging van onze al te gecompliceerde grondvergelijkingen geheel te verwaarloozen, d.i. de lucht door een "ideale" vloeistof te representeeren. Enkele consequenties komt men gemakkelijk op het spoor, wanneer men uitgaat van het in fig. 5 weergegeven kwalitatieve beeld van het stroomingsveld om een draagvlak (gezien in een met het draagvlak meebewegend beschrijvingsstelsel). Ons

physisch gevoel bevestigt de volgende beschrijving:

Tengevolge van zijn kleine dikte, goeden stroomlijnvorm en kleinen "invalshoek" brengt het draagvlak naar een relatief kleine "storing" teweeg in de oneindige parallelstrooming, die gezien vanuit het draagvlak

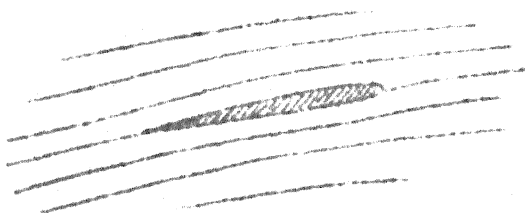


fig. 5

buiten het draagvlak heerscht. Desalniettemin moet echter tengevolge van de kleine viscositeit de tangentieele stroomsnelheid aan het draagvlakoppervlak nul zijn. In het "ideale vloeistofgeval" is dat niet zoo, want de betreffende randvoorwaarde vervalt voor ideale vloeistoffen. Derhalve moet er direct aan het draagvlakoppervlak altijd een dun huidje vloeistof aan te wijzen zijn, waarbinnen de strooming bij een op "ideale" vloeistof gebaseerde behandeling incorrect wordt weergegeven. In dit laagje neemt de stroomsnelheid "in werkelijkheid" van nul tot de "groote stroomsnelheid buiten den vleugel" toe. Het draagt de naam: "gronslaag".

De viscositeit volledig verwaarloozend kan men dus slechts hopen, een beeld van de strooming in een draagvlak te verkrijgen dat de werkelijkheid buiten de grenslaag bevredigend benadert.

32 Stelt men in (2)

$$\gamma = 0$$

en maakt men gebruik van de identiteit (het $\times$ teken definieere het vectorisch product)

$$(\nabla \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla^2 \vec{V} - \nabla \times \text{rot } \vec{V}$$

dan neemt de bewegingsvergelijking den voor het vervolg meest geschikten vorm

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 - \nabla \times \text{rot } \vec{V} \right) = - \nabla p \quad (6)$$

aan. De vergelijkingen (3) en (4) blijven onveranderd bestaan, de randvoorwaarde beperkt zich tot

$$v_n = 0 \quad (7)$$

aan het oppervlak van het draagvlak.

In overeenstemming met de beperking der randgegevens is het stelsel (6), (3), (4) van lagere orde dan het oorspronkelijke. Dit maakt de verificatie van de verwachting, dat de oplossingen van (6), (3), (4), (7) limieten voor $r \rightarrow \infty$ zullen zijn van de oplossingen van het stelsel (4), (5) tot een mathematisch hoogst gecompliceerd probleem. Het desbetreffende onderzoek is nog nimmer in bevredigenden vorm uitgevoerd. Naar alle waarschijnlijkheid zou men in het geval van de strooming om een draagvlak vinden, dat de genoemde verwachting alleen bevestigd wordt, als aan de oplossingen van het gereduceerde stelsel een belangrijke, later uitvoerig te bespreken nevenvoorwaarde wordt opgelegd.

33 Wij leggen in de strooming een volkomen rekbaar en buigbaar lusje, dat door de strooming wordt meegevoerd ("dat altijd uit dezelfde vloeistofdeeltjes bestaat") en berekenen (rechte D 's wagens meevoeren!)

$$\frac{D}{Dt} \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{V} \cdot \frac{Dd\vec{s}}{Dt} = (\text{wegens } (6) \text{ en fig. 1})$$

$$= \oint d\vec{s} \cdot \nabla p + \oint \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{ds} ds = \oint ds \left(\frac{dp}{ds} + \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds} \right) = 0 \quad (8)$$

want $p + \frac{1}{2} V^2$ is een eenduidige veldfunctie

en de integratiekromme is een gesloten lijn.

Dit is de fundamentele "circulatiestelling" der ideale vloeistoffen; in alle roestroomingen lussen is de circulatie $\oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$ constant,

in het bijzonder nul als zij eens nul was. Deze "conserveeringswet" is gelijkwaardig met de wervelstellingen van Helmholtz. Het verband volgt direct uit de formule

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot d\vec{s} \quad (9a)$$

Daar de luchtdeeltjes ver voor den bewegenden vleugel in rust zijn en de rotatie aldaar dus aanvankelijk zeker nul is, moet zij dat bij het passeren van den vleugel ook blijven. Derhalve is het door een bewegend draagvlak voortgebrachte stroomingsveld - afgezien van de grenslaag! - dus rotatievrij.

34 Een rotatievrije vector kan uit een potentiaal worden afgeleid. Substitueer dus in (6)

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (9)$$

*Deze zinsnede moet betrekking op de thans nog normale subsonische stroomings toestanden (zie later).

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 - \nabla \times \text{rot } \vec{V} \right) = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Dat geeft

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (10)$$

hetgeen, mede rekening houdend met (7), integreerbaar is:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \varphi \right|_0 = - \int_0^s \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \frac{1}{\rho_0} \frac{p_0}{\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \kappa \frac{p_0}{\rho_0} - \kappa \frac{p}{\rho} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right\} = \left(\frac{2\kappa}{\gamma-1} \right) \frac{1}{\rho_0} \left\{ \kappa \frac{p_0}{\rho_0} - \kappa \frac{p}{\rho} \right\}$$

Nu is

$$\kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \gamma \kappa P = c^2; \quad c = \text{geluidssnelheid bij de temperatuur } T,$$

en dus kan men (9), als tevens wordt aangenomen dat in het punt 2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

is, in den eenvoudigen vorm

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \varphi = \frac{1}{\gamma-1} (c_0^2 - c^2) \quad (11)$$

schrijven. Uit deze "formule van de Saint Venant" kunnen vele belangrijke conclusies over de strooming van compressibele media worden getrokken. Het is echter onmogelijk, hierop te dezer plaatse in te gaan.

35 Het is duidelijk dat de hierboven bereikte vereenvoudiging der grondvergelijkingen reeds zeer aanzienlijk is. Niet alleen liet één der vergelijkingen zich reeds integreeren, maar bovendien kon het aantal te bepalen functies van vijf tot drie (φ, λ, ρ) worden teruggebracht.

4 Vereenvoudigingen.

41 Ook het stel grondvergelijkingen (9), (10), (3), (4) is nog steeds te ingewikkeld om meer dan enkele algemeene beschouwingen mogelijk te maken. De gestelde opgave van de draagvlaktheorie kan men ons met succes aanpakken als vordere, ten deele aanzienlijke, vereenvoudigingen worden aangebracht. Hieronder volgt een overzicht der zich biedende mogelijkheden.

Vooraf worde vermeld, dat het onderzoek in de draagvlaktheorie opzich uitsluitend beperkt kan blijven tot gevallen, waarin de beweging van het draagvlak zoal niet precies een eenparig rechtlijnige, dan toch een combinatie hiervan is met een vergeliken bij dezen component kleine "secundaire" beweging in een richting loodrecht op zijn eigen vlak, event. nog gecombineerd met kleine draaiingen van het heele draagvlak of van roeren en hulproeren. De situatie, waarin de secundaire bewegingen uit kleine harmonische trillingen bestaan, vormt een bijzonder belangrijk concreet geval. De toelaatbaarheid van deze beperking vloeit voort uit de omstandigheid, dat de in de practijk optredende veranderingen van de hoofdsnelheid zich zoo "langzaam" voltrekken, dat het aerodynamische effect van de daaraan verbonden acceleratie te verwaarloosen is.

Indien de hoofdbeweging een eenparig rechtlijnige is - en andere gevallen zullen door ons niet worden beschouwd - kan men de beschrijving van het stroomingsveld met voordeel betrekken op een coördinaatsstelsel, dat aan dezen constanten component van de draagvlakbeweging deelneemt. De mechanica van de vloeistofstrooming is tegenover deze transformatie invariant, en zij vergemakkelijkt de berekening van drukintegralen, enz., over het oppervlak van het draagvlak. Wij zullen deze beschouwingswijze voor het vervolg aanhouden. Derhalve heerscht in het oneindige van ons stroomingsveld in den vervolge een stationnaire parallelstrooming met de snelheid U , oorspronkelijk de "hoofdsnelheid" van het draagvlak.

42 a Men veronderstelt dat het stroomingsveld in zijn geheel stationnair is, d.w.z. dat er geen secundaire beweging van het draagvlak is, doch dat dit onbewegelijk in de op zichzelf stationnaire parallelstrooming is opgesteld.

Dan wordt (10)

$$\frac{1}{2} \nabla (\nabla \varphi)^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (13)$$

en (11)

$$\frac{1}{2} \bar{V}^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{A_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (14)$$

Verder gaat (3) over in

$$0 = \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = \rho \operatorname{div} \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) \rho = \rho \Delta \varphi + (\nabla \varphi) \cdot \nabla \rho \quad (15)$$

Uit (4) volgt

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa \frac{d\varphi}{\bar{V}^2} \quad \text{of} \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = c^2, \quad \text{of} \quad \nabla \rho = \frac{1}{c^2} \nabla p$$

hetgeen via (13) in (15) gesubstitueerd, na deeling door tot de uitkomst

$$\Delta \varphi - \frac{1}{2c^2} (\nabla \varphi) \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (16)$$

leidt. Uitgeschreven wordt dit

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{c^2} \right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{c^2} \right) - \\ - 2\varphi_{yx} \frac{\varphi_y \varphi_x}{c^2} - 2\varphi_{xz} \frac{\varphi_x \varphi_z}{c^2} - 2\varphi_{zy} \frac{\varphi_z \varphi_y}{c^2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

b Men veronderstelt, dat het stroomingsveld "tweedimensionaal" is, d.w.z. dat de veldfuncties $\bar{V}$, ρ , enz. slechts van twee coördinaten afhangen. Het draagvlak wordt dan onvermijdelijk een cilindrisch lichaam, dat zich in "spanwijdterichting" naar weerszijden tot in het oneindige uitstrekt. In deze situatie blijft de mogelijkheid behouden, den invloed van het draagvlakprofiel te onderzoeken. Tengevolge van de groote slankheid van conventionele draagvlakken behouden de resultaten nl. ook voor werkelijke draagvlakken binnen bepaalde grenzen hun geldigheid.

Is het stroomingsveld bovendien "stationnair", dan neemt de vergelijking (3) den vorm

$$\operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0 = \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} \quad (18)$$

aan, waaruit volgt dat men het veld in dit geval door bemiddeling van de formules

$$\rho V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (19)$$

uit een stroomfunctie kan afleiden. Voor deze stroomfunctie kan men naar analogie met (17) een differentiaalvergelijking afleiden, die er als volgt uitziet

$$\psi_{xx} \left(1 - \frac{\psi_x^2}{(\rho c)^2} \right) + \psi_{yy} \left(1 - \frac{\psi_y^2}{(\rho c)^2} \right) + \frac{2}{(\rho c)^2} \psi_x \psi_y \psi_{xy} = 0 \quad (20)$$

Dit lijkt heel veel op de differentiaalvergelijking der minimaaloppervlaken

$$x_{xx} (1 - x_x^2) + x_{yy} (1 - x_y^2) - 2x_{xy} x_x x_y = 0 \quad (21)$$

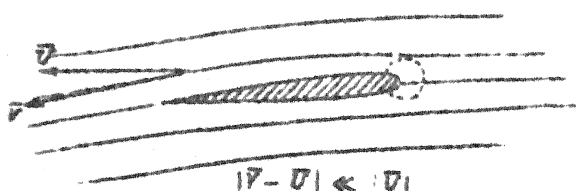
De discriminant van de vergelijking (20) is gelijk aan

$$\left[\frac{\psi_x \psi_y}{(\rho c)^2} \right]^2 - \left[1 - \frac{\psi_x^2}{(\rho c)^2} \right] \left[1 - \frac{\psi_y^2}{(\rho c)^2} \right] = -1 + \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{(\rho c)^2}$$

De vergelijking is derhalve elliptisch in het geval $\bar{V}^2 < c^2$ in het geval $\bar{V}^2 > c^2$. Dit wijst erop, dat de aerodynam

stroomingstoestanden ($\bar{V}^2 < c^2$) een geheel andere structuur zal bezitten dan de aerodynamica der supersonische stroomingstoestanden $\bar{V}^2 > c^2$ en tevens dat zeer bijzondere moeilijkheden te verwachten zijn, als een stroomingsveld zoowel subsonisch als supersonisch gebieden bevat. Ook de volledige vergelijking (17) is van het elliptische dan wel hyperbolische type, al naar $\bar{V}^2 < c^2$ of $\bar{V}^2 > c^2$ is.

g Men veronderstelt, dat de snelheidsveranderingen, die het draagvlak in de stationnaire parallelstrooming tot stand brengt, zeer klein blijven vergeleken bij de snelheid van deze strooming zelve. Het kost geen moeite,



$$|\bar{V} + \bar{v}| < |\bar{V}|$$

fig. 7

aan de hand van fig. 7 te raden, dat deze veronderstelling - vooral bij een zeer dun draagvlak - voor alle punten van het stroomingsveld zal opgaan, wellicht met uitzondering van de directe omgeving van den vleugelneus. Zien wij van deze laatste complicatie even af, dan is dus, als

$$\bar{V} = \bar{U} + \bar{v}, \quad (\bar{U} \text{ const.}) \quad (22)$$

wordt gesteld,

$$|\bar{v}| \ll |\bar{U}|. \quad (23)$$

Het is evident, dat men onder de gegeven omstandigheden tevens kan aannemen, dat de storingen van druk en dichtheid klein blijven vergeleken bij de ongestoorde waarden van die grootheden. Stelt men derhalve

$$p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho \quad (24)$$

dan is

$$|\delta p| \ll p_0, \quad |\delta \rho| \ll \rho_0. \quad (25)$$

Substitueert men nu de uitdrukkingen (22) en (24) in (2) (met $\eta=0$) en (3), en verwaarloost men alle termen, die op grond van de schattingen (23) en (25) klein van de tweede orde zijn, dan blijft over (de vector $\bar{U}$ is naar richting en grootte constant)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p = 0; \quad \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{v} + \bar{U} \cdot \nabla \delta \rho = 0 \quad (26)$$

Daar volgens (4)

$$\delta p = c_0^2 \delta \rho; \quad c_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \quad (2)$$

is, kan men voor de tweede vergelijking ook schrijven

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{v} + \frac{1}{c_0^2} \bar{U} \cdot \nabla \delta p = 0 \quad (27)$$

Differentieert men dit naar den tijd, en past men op de eerste vergelijking (26) de operatie "div" toe, dan krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{v} + \frac{1}{c_0^2} \bar{U} \cdot \nabla \frac{\partial \delta p}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \nabla \delta p &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit kunnen de termen $\operatorname{div} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{v}$ worden geelimineerd. Daar $\operatorname{div} \bar{v} = \Delta$ is, komt er

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \Delta p + \frac{1}{c_0^2} \bar{U} \cdot \nabla \frac{\partial \delta p}{\partial t} - \rho_0 \operatorname{div} (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{v} = 0$$

Daar echter

$$\operatorname{div} (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{U} \cdot \nabla \operatorname{div} \bar{v}$$

is, kan men de snelheid $\bar{v}$ met behulp van (27) geheel laten verdwijnen, hetgeen oplevert

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \Delta p + \frac{2}{c_0^2} \bar{U} \cdot \nabla \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \bar{U} \cdot \nabla (\bar{U} \cdot \nabla \delta p) = 0. \quad (28)$$

In scalaire notatie wordt dat, als de vector $\vec{U}$ langs de X -as ligt, wegens $\vec{U} = U \frac{\partial}{\partial x}$,

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{U^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z^2} + \frac{2U}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x \partial t} = 0. \quad (23)$$

Dit is een lineaire partieele differentiaalvergelijking, hetgeen de verdere wiskundige behandeling uitermate vergemakkelijkt.

Stel in deze vergelijking U eens nul. Hoewel dat in feite niet geoorloofd is, omdat de relaties (23) dan onhoudbaar worden, is het resultaat desalniettemin correct, want men krijgt

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \Delta \delta \rho = 0 \quad (30)$$

en dit is de bekende golfvergelijking, de grondvergelijking der uitstralingsverschijnselen. Inderdaad stelt de uitbreiding van kleine drukstoringen in aanvankelijk stilstaande lucht het geluidsvoortplantingsverschijnsel voor, dat door een met (30) precies overeenkomende vergelijking wordt beheerscht. Deze overwegingen wekken het vermoeden, dat de vergelijking (29) zelf het geluidstralingsverschijnsel zal weergeven, betrokken op een met de snelheid U translateerend coördinatenstelsel. Het is echter bekend, dat de golfvergelijking (30) tegenover de transformatie op dergelijke coördinaten invariant is, indien men haar niet aan de betrekkingen

$$x' = x - Ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (31)$$

doch aan de Lorentz transformatie

$$x' = \frac{x - Ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\beta x}{c_0 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\beta = \frac{U}{c_0}) \quad (32)$$

der speciale relativiteitstheorie ontleend, hetgeen daarop neerkomt dat men tevens een Lorentz-contractie invoert en een transformatie van de tijdvariabele. Inderdaad leert een korte herleiding, dat de vergelijking (29) na transformatie van de variabelen volgens het uit (31) en (32) voortvloeiend voorschrift

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\beta x'}{c_0 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (33)$$

overgaat in

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t'^2} - \Delta' \delta \rho = 0 \quad (34)$$

De transformatie (33) is alleen bruikbaar als

$$U < c_0$$

is, d.w.z. "voor subsonische vliegsnelheden". Voor supersone snelheden komt men via de transformatie

$$x'' = \frac{x}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = t \sqrt{\beta^2 - 1} - \frac{\beta x}{c_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}$$

terecht bij de vergelijking

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t''^2} - \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z''^2} = 0. \quad (35)$$

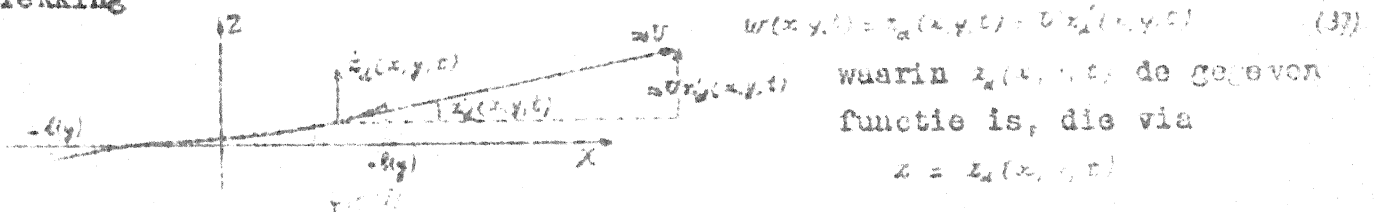
Is de strooiing stationnair, dan vereenvoudigt (29) tot

$$\left(1 - \frac{U^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z^2} = 0 \quad (36)$$

een vergelijking die natuurlijk weer elliptisch in het subsonische en hyperbolisch in het supersone geval is. Dat dit betreft is thans de "hoofdsnelheid" U de beslissende grootheid.

Het nader onderzoek leert, dat men op basis van de hiertoven afge-
de vergelijkingen, ondanks het bestaan van het in fig. 7 bedoelde-
line "uitzonderingsgebied", benaderingsoplossingen voor het stroomings-
d om een draagvlak kan berekenen, die in velerlei opzicht zeer bevre-
gend en alleszins bruikbaar zijn.

Men veronderstelt, dat het geoorloofd is de in het algemeen kleine
diktesmeting van het draagvlak geheel te verwaarlozen. Vervolgens ver-
vange men het randvoorschrift, dat op het oppervlak van het thans plaat-
vormige draagvlak zelve betrekking heeft, door een analoog randvoorschrift,
verbonden aan de projectie van het draagvlak op het XY-vlak, waarmee
het i.v.m. de veronderstelde kleinheid der secundaire beweging (men denke
aan een trilling) geacht kan worden bij voortdurende nagenoeg samen te
vallen. Het systeem van de nieuwe (thans in de richting van de Z-as vallen-
de!) normaal snelheden wordt ontleend aan de door fig. 8 toegelichte be-
trekking



den vorm, positie en secundaire beweging van het plaat-draagvlak geeft.
Deze functie is alleen binnen de vermelde projectie-figuur van het XY-vlak
gedefinieerd.

De betrekking (3) bevat benaderingen, die gelijkwaardig zijn met
in geval a ingevoerde benaderingen. Inderdaad wordt de hier behandelde
vereenvoudiging bijna altijd in combinatie met de onder c besprokene ge-
bruikt. Zij brengt een zeer essentiële vereenvoudiging van het randwaarde-
vraagstuk mede. Vanzelfsprekend laat zij géén mogelijkheid over, den in-
vloed van het profiel van den vleugel te onderzoeken.

g Men veronderstelt, dat de snelheid U zeer klein is vergeleken bij de
geluidssnelheid en bringe op grond daarvan in alle vergelijkingen de limiet-
overgang $c \rightarrow \infty$ aan. Daar c gelijk is aan $\frac{a}{\rho}$ komt dit daarop neer, dat
men a bij alle waarden van a nul stelt, d.i. de lucht als een incompres-
sibele vloeistof behandelt. De hieruit voortvloeiende vereenvoudiging is
zeer groot. De grondvergelijking (10) blijft onveranderd bestaan, doch de
daarin aanwezige parameter ρ is thans een constante, hetgeen de integraal
van deze vergelijking vereenvoudigt tot

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v^2)^2 = - \frac{p}{\rho} + \text{const} \quad (38)$$

Dit is de wet van Bernoulli.

De vergelijking (3) gaat over in

$$\text{div } \vec{V} = \text{div } \vec{v} = \Delta \varphi = 0 \quad (39)$$

De snelheidspotentiaal voldoet aan de vergelijking van Laplace. De ver-
gelijking (39) bepaalt, tezamen met het randwaardensysteem voor
reeds direct het gehele stroomingsveld. De vergelijking (38) is vervol-
gens alleen ter bepaling van het drukveld nodig.
De grondvergelijking (4) vervalt.

5 De hoofdstelling van de draagvlaktheorie.

5.1 Het wiskundig bijzonder eenvoudige geval a wordt thans gebruikt om een
principieele aangelegenheid in het reine te brengen.

Het potentialtheoretische vraagstuk, gedefinieerd door de vergelijking

$$\Delta \varphi = 0 \quad (40)$$

met

$$\varphi = \text{const. in het oneindige} \quad (41)$$

en gegeven waarden van $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ aan oneindige grensvlakken, is mathematisch

meer uitvoerig bestudeerd. Het is bekend dat het een ondubbelzinnige oplossing heeft, wanneer als nevenvoorwaarde continuïteit van de functie zelf, alsmede van de eerste en tweede afgeleiden naar x , y en z wordt opgelegd. In het geval van het draagvlak geeft deze oplossing het stroomingsveld echter niet correct weer. De oorzaak is de volgende:

De genoemde oplossing heeft de eigenschap, in het algemeen een singulariteit te vertoonen in die randpunten, waar de begrenzende wanden knikken vertoonen, dus in het bijzonder in den scherpen achterrand van het draagvlak. Het verschijnsel is welbekend uit de theorie van het door dezelfde vergelijking beheerschte electrostatische veld, waarin bij scherpe randen/hooft veldsterkten optreden. (oneindig

Een bij nadering tot den scherpen achterrand onbegrensd toenemende stroomsnelheid is echter om tweeërlei reden onaanvaardbaar. In de eerste plaats zou dit verschijnsel volgens de wet van Bernoulli (38) gepaard gaan met negatieve drukken van onbegrensde grootte, hetgeen in een gas door expansie en in een vloeistof door dampbelvorming onmogelijk wordt gemaakt (dit in andere gevallen inderdaad waargenomen verschijnsel heet cavitatie) en in de tweede plaats zou het bij de geringste rest van viscositeit door de alsdan onbegrensd toenemende wrijvingskrachten te niet gedaan worden. Het optreden van de genoemde singulariteit is derhalve ontoelaatbaar.

Daar het experiment leert, dat bij den scherpen achterrand in geen geval ernstige locale onregelmatigheden optreden, aan de geldigheid van de grondvergelijking dus zelfs in de directe omgeving van dit gebied nauwelijks getwijfeld kan worden, is de meest aantrekkelijke oplossing van de geconstateerde moeilijkheid deze, dat men een locale inbreuk op de continuïteit toelaat. Deze oplossing blijkt inderdaad de juiste te zijn. Zij wordt nader gepreciseerd door de volgende fundamentele stelling van de draagvlaktheorie:

Het stroomingsveld om een draagvlak bevat een op den scherpen achterrand van het draagvlak aansluitend discontinuïteitsvlak voor de stroomsnelheid. De discontinuïteit heeft ter plaatse van den achterrand op ieder moment een zoodanige waarde, dat de vorming van een oneindig hooft stroomsnelheid aldaar wordt voorkomen. Het veld is overigens continu.

Inderdaad blijkt het randwaardevraagstuk der vergelijking (40) onder deze omstandigheden opnieuw een ondubbelzinnig bepaalde oplossing te hebben. Dat de in de bovenstaande stelling vervatte uitgangspunten inderdaad op ieder moment zoowel de plaatselijke "intensiteit" als de positie van het geheele discontinuïteitsvlak vastleggen, wordt door de volgende overwegingen aannemelijk gemaakt. Men realiseere zich, dat een discontinuïteitsvlak voor de stroomsnelheid kan worden opgevat als een concentratie in één vlak van wervellijnen, dat zijn stroomlijnen van den rotatievector.

Nu kan men uit de circulatiestelling van par. 3.3 zonder moeite afleiden, dat wervellijnen "als materiele draadjes" door de vloeistofstrooming worden meegevoerd en daarbij hun intensiteit (bij geschikte definitie daarvan) behouden. Daar verder de divergentie van een rotatie nul is, hebben zij de bekende eigenschap altijd hetzij gesloten lijnen te vormen (event. tot gesloten lijnen te kunnen worden gecombineerd), hetzij bij de grensvlakken van het veld aan te sluiten, hetgeen in het gegeven geval natuurlijk bij den achterrand van het draagvlak geschiedt. Deze eigenschappen leggen, tezamen met het in de hoofdstelling vervatte voorschrift aangaande hun vorming en de in de grondvergelijkingen neergelegde veldwetten de heele evolutie van het discontinuïteitsvlak ondubbelzinnig vast.

52 De aanwezigheid en zelfs de vorming van een discontinuïteitsvlak in een ideale incompressibele vloeistof is niet in strijd met de in par. 33 genoemde wervelstellingen van Helmholtz, die de vorming van rotatiegebieden in een aanvankelijk rotatievrij veld verbieden. De samenhang van iedere denkbeeldige lus, die de met een discontinuïteitsvlak overeenkomende "limietconstellatie" van werveldraden snijdt, wordt nl. ter plaatse van de doorsnijding aanstonds verbroken, zoodat dergelijke (meestroomende!) lussen nimmer met gesloten lussen in het aanvankelijk rotatievrije veld kunnen worden geïdentificeerd. Zij ontsnappen daarmee aan de overigens imperatieve wervelstellingen. Zij vormen een in een ideale vloeistof allszins "mogelijk" phenomenon. Anderszijds is er geen twijfel aan, dat men hun ontstaan van de stroomingstheorie der ideale vloeistoffen nimmer nader zal kunnen verduidelijken. Proeven hebben aangetoond, dat het in rezen niet de dreigende druksingulariteit, doch de rest van viscositeit is dewelke de vloeistof dwingt den stroomingsvorm met discontinuïteitsvlak te realiseren en niet den vorm met een eventueel door een locale onregelmatigheid uitgeweeschte singulariteit. Dit komt daarop neer, dat het vermoedelijk de strooming met discontinuïteitsvlak en zonder singulariteit is, waartoe de strooming van een visceus medium in het limietgeval van verdwijnende viscositeit nadert. Voor zoover bekend is dit echter nimmer op mathematisch bevredigende wijze aangetoond.

53 Ter verscherping van het algeheele beeld van de strooming wordt thans het "twee-dimensionale" geval nog even nader bestudeerd. In fig. 8 is het

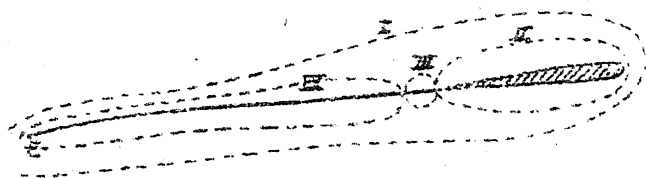


fig. 8.

draagvlak met het daarop aansluitende discontinuïteitsvlak geteekend. De werveldraden van het discontinuïteitsvlak zijn naar weerszijden in het oneindige verdwijnende rechte lijnen loodrecht op het vlak van tekening. In de fig. zijn 4 gesloten lussen aangegeven. Aangenomen wordt dat de draagvlakbeweging uit de rust gestard is, op welk moment de beginwervel E van het discontinuïteitsvlak is gevormd. Derhalve kan de lus I met een gesloten lus in de aanvankelijk rustende vloeistof worden geïdentificeerd (die door "meestroomen" in de positie I is gekomen) en is

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (42)$$

Anderszijds is wegens (8a)

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (43)$$

d.w.z. om het "zog" (d.i. het discontinuïteitsvlak) en het draagvlak treden op ieder moment gelijke, doch tegengesteld gerichte circulations op.

Nu omvatte lus III het stukje discontinuïteitsvlak, dat in het juist beëindigde tijdsintervalletje Δt is gevormd. Dan geldt, omdat eenmaal gevormde wervels onder behoud van hun sterkte worden meegevoerd

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \left[\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \right]_{t-\Delta t} = - \left[\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \right]_{t-\Delta t} \quad (44)$$

waarbij de integraal met het bijschrift "zog" het volledige zog omvat. Uit (42), (43) en (44) volgt

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} + \left[\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \right]_{t-\Delta t} = - \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (45)$$

Men neme nu aan, dat de beweging van het draagvlak, eenmaal begonnen zijnde, een stationnaire rechtlijnige en draailingsvrije is. Men mag dan verwachten dat de strooming, althans in de omgeving van het draagvlak, en van daaruit gezien, eveneens stationnair zal worden. In dien toestand is de geheel rechts in (45) staande afgeleide nul en moet dus ook de geheel links staande integraal nul zijn. Derhalve kan zich in

een eenmaal bereikten stationnaire toestand gesa uitbreiding van het discontinuïteitsvlak meer vormen. Inmiddels leert het nader onderzoek, dat zich bij den start van de beweging een discontinuïteitsvlak vormt, dat zich voortdurend uitbreidt, waartoe de nieuw gevormde wervels in het voornoemde bewegingsgeval echter geleidelijk in intensiteit afnemen, waarbij op den duur de limietwaarde niet wordt benaderd. Is die toestand eenmaal bereikt, dan is in de omgeving van het draagvlak niets meer van een discontinuïteitsvlak te merken. De circulatie om het draagvlak is daarbij constant geworden.

Dit in de limiet gerealiseerde geheel continue en tevens singulariteitsvrije twee-dimensionale stroomingsveld vormt een bekende zelfstandige oplossing van de veldvergelijkingen en het randvoorschrift. In het twee-dimensionale geval is de veldruimte nl. tweevoudig samenhangend, met het gevolg dat de ondubbelzinnige oplosbaarheid van het in den aanvang van par.51 omschreven probleem vervalt. Er zijn in dit geval zelfs oneindig veel continue oplossingen, daar de eenduidigheid eerst hersteld wordt als men tevens de circulatie in de (enkelvoudige) klasse van in het veld construeerbare irreducibele lussen voorschrijft. Blijkbaar kan en moet men die circulatie zoo kiezen, dat de singulariteit aan den scherpen achterrand juist wegvalt. Men verkrijgt dan inderdaad den limiettoestand, die bij insluiting in de beschouwing van het startverschijnsel op den duur wordt benaderd.

54 In het drie-dimensionale geval verwijnt het discontinuïteitsvlak nimmer geheel, doch neemt het in het stationnaire geval lang na den start een vorm aan, waarbij de werveldraden in de richting van de strooming vallen. Bij den start, of bij veranderlijke beweging, zijn er inner ook wervelcomponenten loodrecht op de stroomingsrichting. Qualitatief ziet de configuratie van draagvlak en wervels er - bij een uit de rust begonnen constante en draaiingsvrije beweging - overeenkomstig fig.9 uit. Alle wervels kunnen tot op het draagvlak aansluitende L-vormige wervels worden gecombineerd.

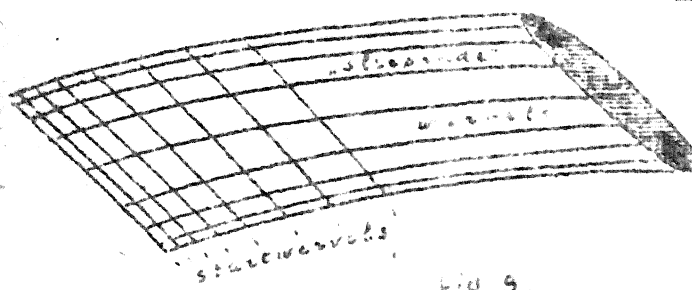


Fig 9.

55 Het is het optreden van het discontinuïteitsvlak, dat de problemen van de draagvlaktheorie zelfs in het eenvoudige geval van een incompressibele ideale vloeistof mathematisch zo veel gecompliceerder maakt dan de vraagstukken bv. uit de theorie van het elektrische veld. Om de moeilijkheden de baas te worden is het in alle niet-stationnaire en/of drie-dimensionale gevallen noodzakelijk de veronderstelling in te voeren, dat het discontinuïteitsvlak voortdurend exact samenvalt met de strook van het XY-vlak achter het draagvlak en dat zijn wervels, voor zoover ze evenwijdig aan de Y-as zijn, zich voortdurend precies met de snelheid, natuurlijk onder behoud van hun intensiteit, van het draagvlak verwijderen. De hierin vervatte benaderingen zijn van dezelfde orde als die, welke aan de vereenvoudigingen c en d, genoemd in par.42, zijn verbonden.

56 De hoofdstelling van de draagvlaktheorie behoudt haar geldigheid in ieder geval, indien het medium compressibel is en de stroomsnelheid overal onder de geluidssnelheid blijft. Zij vervalt echter in het tegenovergestelde geval, dat overal een supersonische stroomsnelheid heerscht.

Daarom zou men beter kunnen spreken van een "hoofdstelling van de draagvlaktheorie voor het subsonic snelheidsgebied". Het is op het oogenblik nog zoo, dat deze 95 % van de literatuur voor zijn rekening neemt.

57 In verband met de in dit hoofdstuk opgenomen referentie naar existentiebewijzen zij er de aandacht op gevestigd, dat deze alleen voor de in punt e bedoelde toestanden en in de overeenkomstig c en d gelineariseerde gevallen beschikbaar zijn. In de overige, meer algemeene, gevallen is over het bestaan en eventueel de menigvuldigheid, van oplossingen, alsmede over de op te leggen continuïteitsvoorwaarden, in algemeen en strikten vorm niet veel bekend. Dat dergelijke kwesties ook technisch wel van belang zijn volgt bv. daaruit, dat het bekend is dat er onder omstandigheden oplossingen kunnen zijn, die om de een of andere reden fysisch niet realiseerbaar zijn.

6 Profieltheorie.

61 Wij willen thans een korten blik werpen op de op het oogenblik meer of minder uitvoerig uitgewerkte hoofdstukken van de draagvlaktheorie. Als zoodanig komt de z.g. "profieltheorie" in de eerste plaats in aanmerking. Zij berust - in haar elementairen vorm - op de vereenvoudigingen a, b en e van par. 42. Men zal inzien, dat er in dit geval geen discontinuïteitsvlak is, doch een overal continue, singulariteiten-vrije strooming met een bepaalde constante circulatie om het draagvlak. De grondvergelijking is de twee-dimensionale potentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (176)$$

Er is ook een stroomfunctie ψ , die aan dezelfde vergelijking

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (177)$$

voldoet, zooals direct volgt uit

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 ; \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{rot } \vec{V} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (178)$$

Evenals op alle twee-dimensionale problemen uit de potentiaaltheorie kan men derhalve de "methoden van de functietheorie" toepassen. Krachtens de vergelijkingen van Cauchy-Riemann voldoet nl. zowel het reële als het imaginaire stuk van iedere analytische functie $F(\zeta)$ met $\zeta = x + iy$ aan de vergelijking (46). Dientengevolge bepaalt iedere functie van dit type 2 stationaire stroomingsvelden van een ideale incompressibele vloeistof. Deze twee velden ontstaan uit elkaar door verwisseling van de rollen van de potentiaal- en de stroomfunctie. In ieder veld leveren de lijnen $\psi = \text{const.}$ de stroomlijnen en de lijnen $\varphi = \text{const.}$ de equipotentiaallijnen. Beide zijn onderling orthogonaal. De singulariteiten van de functie F geven eveneens singulariteiten in het stroomingsveld, bv. bronnen, putten, scherpe randen, geïsoleerde vortels en samenstellingen daarvan (verzamelingen).

Nauw met het bovenstaande verbonden is de mogelijkheid van transformatie van stroomingsvelden in elkaar door conforme afbeelding. Van deze mogelijkheid wordt in de profieltheorie een veelvuldig gebruik gemaakt. Zij reduceert het probleem van de berekening van het stroomingsveld tot het vinden van die afbeeldingsfunctie, die het gevraagde veld uit een reeds bekend doet ontstaan. De uitkomst van de stelling is, zooals bekend is, de volgende.

Indien men de punten (x, y) van een twee-dimensionaal stroomingsveld van een incompressibele vloeistof door bemiddeling van de transformatie

$$X + iY = G(x + iy) \quad (179)$$

waarin G een willekeurige analytische functie is, toevoegt aan de punten (X, Y) van een tweede veld, en daarbij aan de potentiaalfunctie in toegevoegde punten dezelfde waarde geeft, ontstaat opnieuw een dergelijk stroomingsveld.

De door (49) gedefinieerde afbeelding is een conforme, althans wanneer men afziet van de nulpunten van de afgeleide $\frac{dG}{dz}$ van de transformatiefunctie G . In de draagvlaktheorie speelt de afbeelding

$$Z = X + iY = z + \frac{1}{z} ; z = x + iy \quad (50)$$

een bijzondere rol. Men stelde

$$z = r e^{i\varphi}$$

en vindt direct

$$X = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi ; Y = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi$$

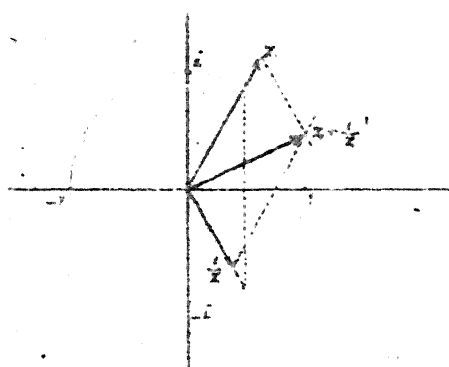
en derhalve

$$\frac{X^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

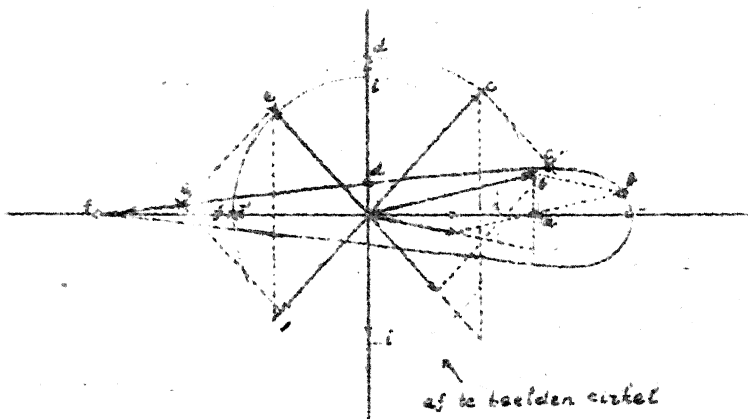
Hieruit volgt dat de cirkels $r = \text{const.}$ van het z -vlak in ellipsen met halve assen $r + \frac{1}{r}$ en $r - \frac{1}{r}$ overgaan. Neemt men r nagenoeg gelijk aan 1, dan komt een heele platte ellips te voorschijn, die reeds aan een dun draagvlak doet denken⁶¹. Voor $r=1$ ontstaat het dubbel tellende segment tussen de punten -2 en $+2$ van de X -as, d.i. de doorsnede van een vlakken plaatvleugel. Prachtige draagvlakprofielen met scherp achterrand krijgt men echter, als men de uitgangscirkel laat gaan dóór het nulpunt $z=-1$, $\varphi = 0$ van de afgeleide

$$h = \frac{1}{z^2}$$

van de afbeeldingsfunctie en óm het tweede nulpunt ($z=+1, y=0$) heen. De onderstaande meetkundige constructie van de toegevoegde figuur licht dit op eenvoudige en overtuigende wijze toe.



constructie v.d. vector $z + \frac{1}{z}$



af te beelden cirkel

Daar alle eigenschappen van het stroomingsveld om den cirkel, d.i. eigenlijk om een oneindig langen cirkelcylinder, ten volle bekend zijn, ook bij willekeurig voorgeschreven circulatie om den cylinder, kan men dat om de op de bovenstaande wijze construeerbare draagvlakprofielen via de afbeelding (50) berekenen.

62 Behalve met op deze basis rustende methoden werkt de elementaire profieltheorie ook nog met een geheel verschillende methode, die men de "singulariteitemethode" kan noemen. Haar structuur kan als volgt worden toegelicht: men kan de strooming om een gesloten (of eventueel

Dat hier inderdaad de door een ellips verstoorde oneindige parallelstrooming te voorschijn komt volgt daaruit, dat de transformatie (50) het oneindige invariant laat ($Z=z$ voor $|z|$ zeer groot), de aldaar oorspronkelijk heerschende parallelstrooming dus onveranderlijk blijft bestaan, en daaruit, dat de functie $z + \frac{1}{z}$ geen singulariteiten, en de afgeleide geen nulpunten, bezit in het gebied buiten den eenheidscirkel.

zich tot in het oneindige uitstrekkende (niet gesloten) contour van het XY-vlak "analytisch voortzetten" aan één zijde van deze grenslijn. Fysisch komt dit daarop neer, dat men ook hier vloeistof aanbrengt, die een zoodanigen stroomingstoestand bezit, dat de gegeven contour stroomlijn wordt. Nu is aan dit thans het gansche XY-vlak bestrijkende strooming op de reeds genoemde wijze een analytische functie van de variabele

toegevoegd. Deze functie wordt gekarakteriseerd door zijn singulariteiten. Derhalve moet ook het fysische veld door bepaalde singulariteiten karakteriseerbaar zijn. Dit is inderdaad het geval; de singulariteiten zijn, zooals wij reeds vermeld en, de uit de potentiaaltheorie welbekende "bronnen en putten" en gelokaliseerde wervels, of eventueel combinaties daarvan. De enkelvoudige bronnen, putten en wervels kunnen alle met logaritmische singulariteiten van de complexe potentiaalfunctie worden geïdentificeerd; de polen van deze functie geven "dipolen", "quadrupolen", enz., dat zijn combinaties van bronnen en putten, in het stroomingsveld. Daar de strooming op een draagvlak géén singulariteiten bevat, moeten deze in dit geval alle binnen de draagvlakcontour terechtkomen. Om inderdaad op deze basis een draagvlakcontour te voorschijn te brengen, moet men op de oneindige parallelstrooming de strooming superponeren (de grondvergelijkingen zijn, in het stationnaire geval met inbegrip van het randvoorschrift, lineair!) van een continu over de "skeletlijn" van het profiel verdeeld bronnen- en putten-systeem. Om de circulatie aan het profiel er bij te krijgen moet een wervel of een wervelsysteem worden toegevoegd.

Een nog andere methode opereert met een "wervelverdeling" over de contourlijn, waardoor dit een discontinuïteitsvlak (met aan de binnenzijde in rust verkeerende "vloeistof") wordt.

In beide gevallen gaat de mathematische oplossing van het profielvraagstuk (het profiel gegeven denken) van een de randvoorwaarde reproduceerende integraalvergelijking afhangen.

63 Het op bovenstaande grondslagen rustende deel van de profieltheorie vormt een reeds klassiek hoofdstuk der draagvlaktheorie. In den laatsten tijd zijn vraagstellingen aan de orde gekomen, die in zekeren zin op een omkeering van de zoojuist behandelde neerkomen. Men heeft nl. uit grenslaagberekeningen afgeleid, dat draagvlakken, die, onder kleinen invalshoek in een stationnaire parallelstrooming geplaatst, aan hun oppervlak een bepaalde, bijzonder gelijkmatige drukverdeling doen ontstaan, speciale voordeelen (nl. een bijzonder lage weerstand) bezitten. Hieruit vloeit de opgave voort, het bij een gegeven drukverdeling behoorend profiel te bepalen.

Een ander probleem, waaraan in de laatste jaren is gerekend, is het volgende. In de omgeving van een draagvlak treden altijd snelheden op, die groter zijn dan de snelheid V , waarmede het draagvlak wordt "aangestroomd". Men heeft zich nu de opgave gesteld, de grootste oversnelheid zoo laag mogelijk te houden, teneinde het optreden van "compressibiliteitseffecten" tot zoo hoog mogelijke aanstroomsnelheden uit te stellen. Dit leidt tot bijzondere "profielen met zoo klein mogelijke oversnelheid".

64 De gedurende den laatsten oorlog verhoogde bovenste grens der geëxploiteerde vliegsnelheden maken dat de in de vorige paragraaf aangestipte profieltheoriën ontoereikend worden. Zij bieden immers geen gelegenheid, de bij hoge snelheden snel aan invloed winnende gevolgen van de compressibiliteit van de lucht in aanmerking te nemen. Men heeft dan ook vooral

*Vertankingspunten, anders dan logaritmische, van de complexe potentiaalfunctie leiden tot knikken in stroomlijnen, d.w.z. tot stroomingsvormen om scherpe of inspringende wanden.

in den laatsten tijd getracht, de beperking ϵ uit de fundamenteen van de theorie te verwijderen. Men in deze richting liggend resultaat krijgt men om zoo te zeggen cadeau. Voor zoover men nl. de door het draagvlak veroorzaakte verandering der stationnaire parallelstroaming inderdaad als een zeer kleine storing mag opvatten en de onder ϵ in par. 42 besproken vereenvoudigingen aanbrengt, heeft men niets anders te doen dan de grondvergelijking (46) te vervangen door de uit (26) volgende vergelijking

$$\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (51)$$

die na de transformatie

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y; \quad \beta = \frac{U}{c} \quad (52)$$

weer den ouden vorm (46) herneemt. Dat wil zeggen dat het compressibiliteitseffect in deze benadering door een Lorentz-contractie - een affine transformatie van de geometrische draagvlakconfiguratie dus - wordt weergegeven. In wezen is het gestelde vraagstuk daarmee tot reeds bekend materiaal teruggebracht.

Deze benadering is echter veelal niet voldoende, in het bijzonder niet als de dikte van het draagvlak groot is en als de invalshoek, waaronder het in de parallelstroaming is geplaatst, relatief groot is. Er zit dan niets anders op dan de grondvergelijking (51) te vervangen door de veel gecompliceerdere, uit (17) volgende vergelijking

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right) - 2\varphi_{xy} \frac{U_x U_y}{c^2} + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{U_y^2}{c^2}\right) = 0 \quad (53)$$

die niet langer lineair, doch wel quasi-lineair is. Hierbij behoort de met (12) overeenkomende betrekking (c_0 is nu de geluidssnelheid in de ongestoorde stroaming, d.i. in het oneindige)

$$c^2 = c_0^2 - \frac{K-1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - U^2) \quad (54)$$

Men heeft langs dezen weg eenige min of meer voorloopige resultaten bereikt, die uiterst moeilijke berekeningen hebben gevergd. In alle gevallen moet de nevenvoorwaarde worden gesteld, dat de stroomsnelheid overal in het veld kleiner moet blijven dan de locale geluidssnelheid, hetgeen daarop neerkomt, dat de grondvergelijking overal in het veld van het elliptische type moet zijn. De meest bekende methode is die van Rayleigh-Janzen. Dit is een iteratiemethode, die het volgende recept volgt

$$\begin{aligned} 1^o \quad & \varphi_{xx}^{(0)} + \varphi_{yy}^{(0)} = 0 \quad \text{+ bekende randvoorschrift} \\ 2^o \quad & \varphi_{xx}^{(1)} + \varphi_{yy}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \left\{ \varphi_{xx}^{(0)} \varphi_x^{(0)2} + 2\varphi_{xy}^{(0)} \varphi_x^{(0)} \varphi_y^{(0)} + \varphi_{yy}^{(0)} \varphi_y^{(0)2} \right\} \\ 3^o \quad & \varphi_{xx}^{(2)} + \varphi_{yy}^{(2)} = \frac{1}{c^2} \left\{ \varphi_{xx}^{(1)} \varphi_x^{(1)2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

enz.

Een iets andere iteratiemethode is door Kundt aangegeven. Het eenige wezenlijke verschil is, dat zij begint met de "gelineariseerde" vergelijking (51).

De ontmoete moeilijkheden zijn van rekentechnischen niet van principieelen aard. De gebruikte vergelijkingen zijn immers alle van een volledig bestudeerd type (Laplace en Poisson). Een bijkomstige moeilijkheid is, dat de convergentie van het iteratiesysteem niet bij voorbaat vast staat.

Kortgeleden is Kaplan er in geslaagd aan de wiskunde van de wederom veel op de bovenstaande gelijkende approximatiemethode van

Poggi (die gebruik maakt van een reeksontwikkeling

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \beta \varphi^{(1)} + \beta^2 \varphi^{(2)} + \dots \quad (55)$$

van de potentiaal naar opklimmende machten van het "getal van Mach" (β), hetgeen ook weer daarop neerkomt, dat $\varphi^{(0)}$ de "incompressibele" oplossing is) door een geraffineerde toepassing van complexe variabelen en methoden der functietheorie een bijzonder eleganten en relatief eenvoudigen vorm te geven, die het prestatievermogen dezer methode ongetwijfeld aanzienlijk verbetert.

65 Er bestaat nog een geheel andere methode voor de behandeling van het profielvraagstuk in het compressibele (twee-dimensionale) gebied. Deze berust op de mogelijkheid, de vergelijking (53) zonder verwaarloozingen door transformatie te lineariseeren. Er zijn zelfs twee transformaties bekend, die dit presteeren. De eerste is de z.g. transformatie van Molenbroek. Hierbij belandt men als volgt:

In een twee-dimensionaal stationnair stroomingsveld is aan ieder veldpunt op ondubbelzinnige wijze een "stroomsnelheidsvector" $\vec{V}$ toegevoegd, d.w.z. een punt van een "snelheidsvlak" ($V_x; V_y$). Uitgaande van de veronderstelling, dat deze toevoeging althans in een bepaald gebied van het "snelheidsvlak" omkeerbaar eenduidig is (hetgeen niet noodzakelijk het geval is, zoodat men in bepaalde gevallen complicaties kan verwachten), kan men de onafhankelijk variabelen x, y via dit verband vervangen door 2 coördinaten in het snelheidsvlak, waarvoor men dikwijls poolcoördinaten $V = |\vec{V}|; \vartheta$ (= hoek tusschen $\vec{V}$ en de V_x -as) gebruikt. De transformatieformules luiden

$$dx = \frac{\partial x}{\partial V} dV + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial V} dV + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (56)$$

en leiden uiteindelijk tot de potentiaalvergelijking

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) V^2 \varphi_{rr} + V \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \varphi_r + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 \varphi_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad (57)$$

Dezelfde transformatie, toegepast op de vergelijking der stroomfunctie, leidt tot de vergelijking van Tschapligin

$$V^2 \psi_{rr} + V \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \psi_r + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \psi_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad (58)$$

die iets eenvoudiger is. Beide vergelijkingen zijn lineair, omdat ook de geluidssnelheid c volgens de Saint Venant aléén van V afhangt.

De tweede lineariseerende transformatie is die van Legendre

$$V \cos \vartheta = \varphi_x; \quad V \sin \vartheta = \varphi_y; \quad \Phi = x \varphi_x + y \varphi_y - \varphi,$$

waarbij als nieuwe onafhankelijk variabelen eveneens 2 coördinaten, bij voorkeur poolcoördinaten V, ϑ , in het snelheidsvlak worden ingevoerd, doch welke daarenboven met de "gecorrigeerde potentiaal" opereert. Zij leidt tot de lineaire vergelijking

$$V^2 \Phi_{rr} + V \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \Phi_r + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \Phi_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (59)$$

Het is natuurlijk een groot voordeel, dat de grondvergelijking in deze gevallen lineair is. De prijs, die men hiervoor echter moet betalen, ligt in de complicatie, die thans in de randvoorwaarde blijkt te zijn gebracht. Het randvlak is nl. in het x, y -vlak gegeven en niet in het "snelheidsvlak". Daarom blijft het onderzoek uitermate gecompliceerd.

ceerd en is toepassing op de concrete vraagstukken van de (tot hier nog steeds "subsone") profieltheorie niet zonder verdere kunstgrepen mogelijk. Op basis van de transformatie van Molenbroek zijn eenige resultaten bereikt o.a. door Shue-Shen Tsien. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een vereenvoudigd verband tusschen de geluidsnelheid c en de stroomsnelheid V . De vereenvoudiging komt neer op de substitutie van een benadering voor de grondvergelijking (4), welke vergelijking voor de afleiding van dit verband benodigd is. Ook in deze gevallen speelt de incompressibele strooming om het draagvlak steeds een zekere rol. Zij fungeert daarbij niet als "nulde benadering", doch blijkt als uitgangspunt voor een "transformatie" naar een compressibele strooming dienst te kunnen doen. Bij deze transformatie ondergaat het profiel een vooraf onbekende vervorming, (in eerste benadering is dit de Lorentz-contractie), zoodat een bepaald "gewenscht" profiel door probeeren moet worden verwerkelijkt. Op die wijze ontkomt men aan de moeilijkheden, verbonden aan het directe gebruik van de randvoorwaarde. Zeer kortgeleden is de methode door een andere Chinees, J.C.Lin. tot een veelbelovend werktuig der draagvlaktheorie geperfectionneerd.

7 Supersone profieltheorie.

71 Nieuwe perspectieven ontstaan, wanneer de stroomsnelheid U niet onder, doch boven de geluidsnelheid ligt (en wel liefst een flink stuk, opdat de mogelijkheid van locale gebieden van subsone strooming ook in de omgeving van het draagvlak uitgeschakeld zij). De grondvergelijking wordt dan nl. hyperbolisch, waardoor de machtige hulpmiddelen der karakteristiekentheorie in het veld gebracht kunnen worden.

Beginnen wij met behalve de vereenvoudigingen a en b ook de vereenvoudiging c van par.42 te aanvaarden, dan luidt de grondvergelijking voor het drukveld in aansluiting op (29)

$$\left(\frac{U^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (59)$$

Uit aande van de vergelijkingen (26) moge de lezer zelf verifiëren, dat voor de snelheidspotentiaal ϕ van de snelheid V (dus $V = \sqrt{\phi}$) een precies gelijke differentiaalvergelijking

$$\left(\frac{U^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (60)$$

geldt. Zij heeft de algemeene oplossing

$$\phi = f_1(y - x \operatorname{tg} \alpha) + f_2(y + x \operatorname{tg} \alpha); \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (61)$$

De twee een hoek α , resp. $-\alpha$ met de X -as insluitende bundels rechte lijnen

$$y - x \operatorname{tg} \alpha = \text{const.}, \quad y + x \operatorname{tg} \alpha = \text{const.} \quad (62)$$

zijn de "karakteristieken" van de gegeven differentiaalvergelijking.

Uit (61) volgt (de punten beteeke non differentiatie naar $y \mp x \operatorname{tg} \alpha$)

$$v_x = (f_1 - f_2) \operatorname{tg} \alpha; \quad v_y = f_1 + f_2 \quad (63)$$

Voor de projecties van den vector $\vec{v}$ op de karakteristieken vindt men derhalve

$$\begin{aligned} v_{y-x \operatorname{tg} \alpha} &= v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha = (f_1 - f_2) \sin \alpha + (f_1 + f_2) \sin \alpha = 2f_1 \sin \alpha \\ v_{y+x \operatorname{tg} \alpha} &= v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha = \dots = -2f_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (64)$$

Nu is f_2 constant langs de karakteristieken $y+x \operatorname{tg} \alpha = \text{const.}$ en f_1 langs

de karakteristieken $y - x \tan \alpha = \text{const.}$. Daaruit volgt de eenvoudige, in de volgende figuur aangegeven meetkundige constructie van het stroomingsveld. Deze gaat uit van een langs één lijn van één der twee bundels karakteristieken als parallelstrooming $\vec{U}$ gegeven gedachte strooming en van een tweede willekeurige (door een gebroken lijn geapproximeerde) kromme, waarvan geëischt wordt dat zij stroomlijn (wand!) zal zijn en waarlangs derhalve alléén de richting van den stroomvector is voorgescreven. De figuur geeft bovendien het stroomingsveld weer, dat resulteert uit storing en parallelstrooming. Deze resultante voldoet natuurlijk eveneens aan de vermelde geometrische wetmatigheid.

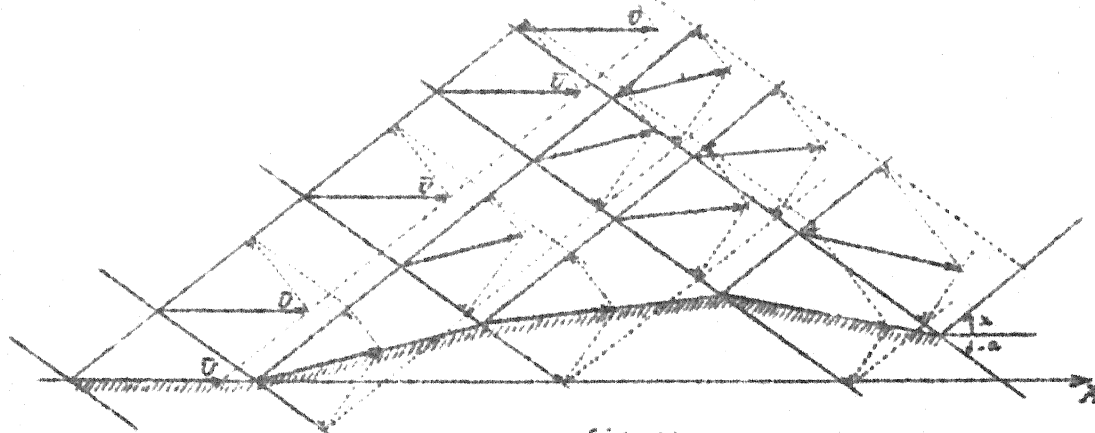


fig. 11.

De constructie zelf toont met voldoende duidelijkheid aan, dat de gebezigde combinatie van "begin en randvoorwaarden" goorloofd en juist voldoende is. Langs iedere karakteristiek is de projectie van den snelheidsvector op de door den anderen bundel bepaalde richting constant.

De figuur bevat juist genoeg aanknoopingspunten om te doen inzien, dat de strooming op een "supersoon draagvlak" (dat op straffe van een excessieven stroomingsweerstand in tegenstelling met de "subsons profielen" óók een scherp voorrand blijkt te moeten bezitten (in de hier aanvaarde benadering) er als volgt uitziet, (fig. 12)

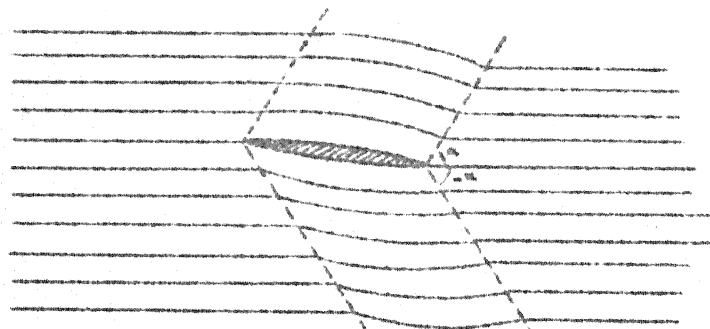
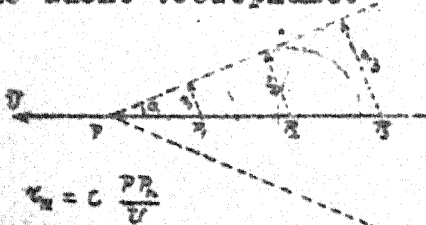


fig. 12.

Vér voor en ver achter het draagvlak heerscht een parallelstrooming, daartusschen bevindt zich een pijlvormig gebied, waarin de stroomlijnen de boven-, resp. onderzijde van het profiel steeds weer afbeelden en waarin in het gegeven geval bóven vergroote en onder verkleinde snelheden optreden. Tovens wordt het duidelijk, waarom men de karak-

teristieken in de aerodynamica opvat als "voortplantingslijnen van kleine storingen".

Ken andere toelichting hierbij geeft fig. 13, waarin is aangegeven tot waar de storing, die een met supersone snelheid bewegend klein storingscentrum in de verschillende punten van zijn baan teweeg brengt, zich heeft voortgeplant op het moment, waarop dit centrum het punt P heeft bereikt, daarbij aannemend, dat de storing zich met geluidsnelheid door de lucht voortplant.



$$r = c \frac{PR}{U}$$

Mén ziet in deze figuur de hoek α en de karakteristiek door P terugkeeren. Zij begrenst het gebied, waarbinnen de geheele beweging van het stoorcentrum het stroomingsveld op het gegeven moment beïnvloedt. Buiten dit

fig. 13.

gebied behoeft men op het beschouwde oogenblik geen aerodynamische "levens-teekenen" van het stoorcentrum te zoeken.

72 Wanneer de bovenstaande behandelingswijze niet nauwkeurig genoeg is, moet men weer op de gecompliceerde, thans hyperbolische, differentiaalvergelijking (53) teruggrijpen. Ook in dit geval is althans een geometrische constructie van het veld veelal door tussenkomst der "karakteristieken" van de differentiaalvergelijking mogelijk. De hierdoor gerepresenteerde eigenschappen van het veld kunnen in wezen uit de in de vorige paragraaf bereikte resultaten worden afgeleid. Men kan nl. de verandering van de strooming binnen een voldoende klein gebiedje van het veld altijd als storingen van een "gemiddelde" parallelstrooming opvatten, zoodat de gelineariseerde theorie haar geldigheid behouden moet voor kleine elementen van het werkelijke veld. Darnalve kunnen aan ieder voldpunt altijd 2 karakteristieke richtingen worden toegevoegd, die met den gemiddelden stroomvector hoeken α en $-\alpha$ insluiten, waarbij

$$\tan \alpha = \frac{q}{a} \quad (65)$$

in overeenstemming met het door de wet van de Saint Venant gegeven verband tusschen α en q kan worden berekend. De karakteristieken van de vergelijking (53) zijn nu natuurlijk de integralen van deze twee "richtingsvelden". Het zijn nu in het algemeen twee bundels kromme lijnen. De daaraan in het snelheidsvlak toegevoegde lijnen zijn epicycloïden.

De thans min of meer in differentiaalvorm goldige veldgeometrie van de vorige paragraaf is juist voldoende om ook in het algemeene geval tot een grafische veldconstructie te komen. Deze weg leidt tot de bekende "karakteristiekemethode van Prandtl Busemann".

Er kunnen in deze situatie moeilijkheden ontstaan, doordien het geconstrueerde veld fysisch niet meer realiseerbaar is, bv. tengevolge van het optreden van elkaar snijdende stroomlijnen. In het karakteristiekenveld wordt men voor zulke complicaties gewaarschuwd door het optreden van omhullenden der bundels karakteristieken. Dit voorval wijst erop, dat wij de stilzwijgend steeds aanvaarde eisch der continuïteit weer plaatselijk moeten laten vallen. Met andere woorden: in zulke stroomingsvelden treden wederom discontinuïteitsvlakken op, ditmaal voor den normaal component van de stroomsnelheid. Hierbij veranderen de druk en de dichtheid eveneens sprongsgewijs. Het blijkt, dat de normale veldvergelijkingen ontoereikend zijn om het verband tusschen deze drie veranderingen ondubbelzinnig vast te leggen. Darnalve moet de structuur van een dergelijk discontinuïteitsvlak aan een aparte fysische beschouwing worden ontleend, waarbij blijkt dat zich hier tevens een verandering van de entropie, d.i. een irreversibele omzetting van stroomingsenergie in warmte, voltrekt. Een andere complicatie, die dergelijke "stootfronten" gewoonlijk niet zich sleepen, is het optreden van rotatie in de strooming achter den stoot, óók wanneer zij ervóór rotatievrij is. Dit maakt dat de strikte berekening van supersone stroomingsvelden met drukstooten in den regel een hopeeloos gecompliceerde zaak vormt.*

Ook aan draagvlakprofielen treden stootfronten op. In dit geval kan men, mits het draagvlak een scherpen voor- en achterrand heeft, hun plaats van te voren vaststellen, waarna de karakteristiekemethode een

* Daarbij komt, dat stroomingsvelden met stootfronten dikwijls locale gebieden van subsone strooming bevatten. De mathematische behandeling van dergelijke velden, waarvan de potentiaalvergelijking in het veld van type verandert, stuit in het algemeen op zeer bedenkelijke moeilijkheden.

daarop aansluitende veldconstructie vermag te leveren.

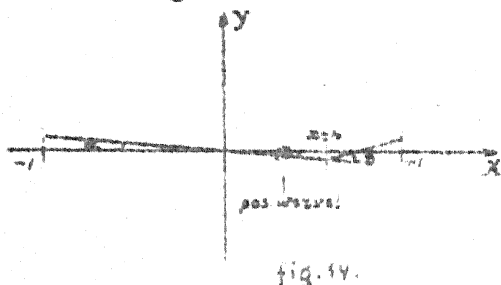
73 In principe kan de potentiaalvergelijking ook in het supersone geval met behulp van de transformaties van Kolenbroek en Legendre worden gelineariseerd. Tot nu toe werd van deze mogelijkheid bij het profielonderzoek echter geen gebruik gemaakt, omdat het gevoelen bestaat, dat de "karakteristiekemethode" het in eenvoud immer met groote voorsprong zal winnen.

Om dezelfde reden is tot nu toe voor zoover bekend ook geen gebruik gemaakt van een principieel mogelijke generaliseering tot het supersone geval van de "veldsingulariteitmethode", besproken in par.62. Deze mogelijkheid wordt wel benut in de buiten de draagvlaktheorie vallende behandeling van drie-dimensionale rotatiesymmetrische supersone stroomingsvelden.

8 Berekening der roerwerking.

81 De in het vorige hoofdstuk besproken methoden leiden, met een enkele uitzondering, tot moeilijkheden wanneer men de strooming wil berekenen om een profiel, dat de een roeruitslag typeerende knik vertoont. (De uitzondering wordt gevormd door de karakteristiekemethode der supersone aerodynamica).

Tot een redelijk goed resultaat komt men echter gemakkelijk, als men de benadering $\underline{g}$ en $\underline{d}$ van par.42 aanvaardt. Dit houdt de extra beperking in, dat de roeruitslag klein moet blijven. De gang van zaken is de volgende.



Men realiseere zich, dat het dunne draagvlak kinematisch niets anders is dan een discontinuïteitsvlak voor den tangentieelen component van de stroom-snelheid, die immers door het ontbreken van symmetrie vlak onder en vlak boven het draagvlak niet gelijk zal zijn. In deze kwaliteit is het echter equivalent met een wervelvlak. De locale intensiteit hiervan worde voorgesteld door de functie

$\gamma(x)$; $(-1 \leq x \leq +1)$; wij stellen de draagvlakkoorde gemakshalve gelijk aan z). Nu induceert één wervel in het veld volgens de wet van Biot en Savart (geïntegreerd over den oneindig lagen wervel van het "twee-dimensionale veld") de snelheid

$$\frac{\gamma}{2\pi z} \quad (66)$$

Derhalve induceeren de wervels $\gamma(x)dx$ in het punt $x=\xi$ van de X-as met een foutje, dat van dezelfde orde van grootte is als de in de benaderingen $\underline{g}$ en $\underline{d}$ toch al vervatte, de normaalsnelheid

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma(x)dx}{x-\xi} \quad (67)$$

De randvoorwaarde luidt echter volgens (37), in het door fig.14 voorgestelde geval

$$V_y = \begin{cases} -U\alpha & \text{voor } -1 \leq \xi < h \\ -U(\alpha-\beta) & \text{voor } h < \xi \leq +1 \end{cases} \quad (68)$$

Wij vinden voor de onbekende functie $\gamma(x)$ dus de integraalvergelijking

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(x)dx}{x-\xi} = \begin{cases} -U\alpha & \text{voor } -1 \leq \xi < h \\ -U(\alpha-\beta) & \text{voor } h < \xi \leq +1 \end{cases} \quad (69)$$

Van de oneigenlijke integraal in het linkerlid blijkt de hoofdwaaarde te moeten worden genomen. De singuliere kern $\frac{1}{x-\xi}$ zullen wij nog in ander verband tegen komen, zij speelt in de geheele theorie van het dunne draagvlak een belangrijke rol. Het is dan ook geen wonder, dat de

toepassingen in de draagvlaktheorie tot uitvoerige zuiver mathematische onderzoekingen hebben geleid van integraalvergelijkingen met deze singuliere kern.

De oplossing van de verg. (69) bestaat uit de som van een particuliere oplossing der inhomogene vergelijking (te vinden via de substituties $x = \cos \vartheta$, $\xi = \cos \theta$ en Fourier-ontwikkeling van de functie $\gamma(\vartheta)$) en de met een constante vormenigvuldigde oplossing

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (70)$$

der homogene reductie. De constante wordt bepaald door de eisch, dat zich in het punt $x=1$ geen singulariteit bevindt, hetgeen blijkt neer te komen op

$$\gamma(1) = 0 \quad (71)$$

Voor het drukverschil $\Delta p(x)$ in tegenover elkaar onder en boven het draagvlak gelegen punten vinden wij in verband met de wet van Bernoulli (38):

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{\text{onder}} - p_{\text{boven}} = \frac{\rho}{2} (V_{\text{onder}}^2 - V_{\text{boven}}^2) = \\ &= \frac{\rho}{2} (V_{\text{onder}} + V_{\text{boven}})(V_{\text{onder}} - V_{\text{boven}}) \approx \rho U (V_{\text{onder}} - V_{\text{boven}}) \end{aligned} \quad (72)$$

Doch

$$V_{\text{onder}} - V_{\text{boven}} = \gamma \quad (73)$$

en derhalve is

$$\Delta p(x) = \rho U \gamma(x) \quad (74)$$

Met deze formule kan men alle resulteerende krachten en momenten uitrekenen. Bv. volgt voor de draagkracht

$$K = \int_{-1}^1 \Delta p(x) dx = \rho U \int_{-1}^1 \gamma(x) dx = \rho U \Gamma \quad (75)$$

waarbij Γ de circulatie om het geheele draagvlak voorstelt. Deze beroemde formule blijkt haar geldigheid voor draagvlakken van eindige dikte te behouden, d.i. zij is in feite onafhankelijk van de vereenvoudigingen $\underline{g}$ en $\underline{d}$ (par.42).

82 Het is niet noodzakelijk, de benaderingen $\underline{g}$ en $\underline{d}$ in te schakelen. Men kan nl. door toepassing van de beroemde transformatie van Schwarz de in fig.14 geteekende gebroken lijn direct op den eenheidscirkel afbeelden, het stroomingsveld eromheen derhalve conform afbeelden op de strooming om den eenheidscirkel, en omgekeerd. Daarmede is volgens par.61 het aerodynamisch vraagstuk in principe opgelost. Het is in dit geval ook niet nodig, dat de roeruitslag klein is.

Men nog andere werkwijze knoopt aan bij de theorie der tandem-vleugels, die evenals de theorie van den "tweedekker" gebruik maakt van door elliptische functies bepaalde conforme afbeeldingen. De wiskundige uitwerking van dergelijke methoden is moeilijk en bewerkelijk.

9 Het draagvlak met eindige spanwijdte bij stationnaire onstrooming.

91 Wanneer men het draagvlak een eindige spanwijdte geeft, het stroomingsveld dus van alle drie de veldcoördinaten afhankelijk wordt, worden de mathematische moeilijkheden direct veel groter, zoodat men in dit geval altijd met min of meer geslaagde benaderingsoplossingen genoegen moet nemen. Een der vereenvoudigingen, die altijd worden aanvaard, bestaat uit de verwaarloozing van de dikteopmeting van het draagvlak. Dit brengt mee, dat het als een discontinuïteits- of wervelvlak opgevat kan worden. Men zal geredelijk inzien, dat de wervelverdeling daarbij in aansluiting op fig.9 (de startwervels naar het on-

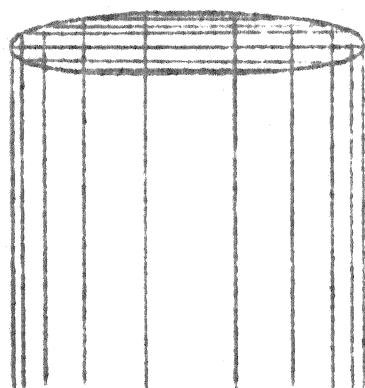


fig. 15

eindige opschuivend) het beeld van nevenstaande figuur vertoont. Een name nu aan, dat het draagvlak zeer slank is en verwaarlooze de koorde-afmeting geheel, hetgeen daarop neerkomt dat het door één enkelen "dragenden wervel" wordt vervangen. Vervolgens kan met het wervelsysteem voor ieder willekeurig dwarsstrookje van het draagvlak splitsen in een oneindig langen wervel van constante intensiteit, en een stelsel van Γ , Γ en Γ vormige wervels. Ware de oneindige wervel er alleen, dan ware het

geval weer "tweedimensionaal" en zou deze wervel de door de twee-dimensionale theorie geëischte evenredigheid met de invalshoek van het beschouwde strookje moeten vertoonen:

$$\Gamma = c \cdot \alpha, \quad c: \text{bekende constante}$$

Berekent men nu met de formule van Biot en Savart de snelheid, die den (samengestellten) tweeden component ter plaatse x van dit strookje induceert, dan vindt men dat deze invalshoek langs het heele strookje in eerste benadering constant is, en de waarde (b halve spanwijdte)

$$v_{ind} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{d\Gamma(x)/dx}{x-\xi} dx \quad (76)$$

heeft. (N.B.: $\frac{d\Gamma(x)}{dx} dx$ is de intensiteit van de sleepende wervels!). Zij staat praktisch loodrecht op het vlak van den vlougel en is derhalve equivalent met een verandering v_{ind}/v van den invalshoek. Brengt men deze correctie op den invalshoek aan, dan kan men den "tweeden component" verder buiten beschouwing laten, waarmede de integraalvergelijking

$$\Gamma(\xi) = c(\xi) \{ \alpha(\xi) - \alpha_{ind}(\xi) \} = c(\xi) \alpha(\xi) - \frac{c(\xi)}{4\pi U} \int_{-b}^{+b} \frac{d\Gamma(x)/dx}{x-\xi} dx \quad (77)$$

wordt verkregen. De constante c is van ξ afhankelijk omdat zij evenredig is met de plaatselijke koorde.

Over de integraalvergelijking (77), de beroemde vergelijking van Prandtl voor de circulatieverdeling, bestaat een omvangrijke literatuur. Zij wordt opgelost met behulp van Fourier-analyse na de bij de verg. (66) vermelde substituties te hebben aangebracht, of met behulp van de Fourier-ontwikkelingen vervangende inharmonische gonaometrische ontwikkelingen.

Men merke op, dat hier weer de singuliere kern $\frac{1}{x-\xi}$ optreedt.

Technisch is de circulatieverdeling van belang omdat zij de eigenschappen van het draagvlak bij grooten invalshoek beïnvloedt en omdat zij een component van den weerstand, den z.g. "geïnduceerden weerstand" beheerscht.

92 Hoewel de vergelijking van Prandtl voor inderdaad slanke draagvlakken een redelijk resultaat levert, is zij natuurlijk niet in alle gevallen voldoende nauwkeurig. Een verscherpte behandelingswijze is mogelijk door niet van het snelheidsveld, maar van het drukveld uit te gaan. Daarbij aanvaarde men tevens de vereenvoudigingen q en $\underline{q}$ van par. 42.

Volgens (29) geldt dan ($c_0 \rightarrow \infty$; δp onafh. van T)

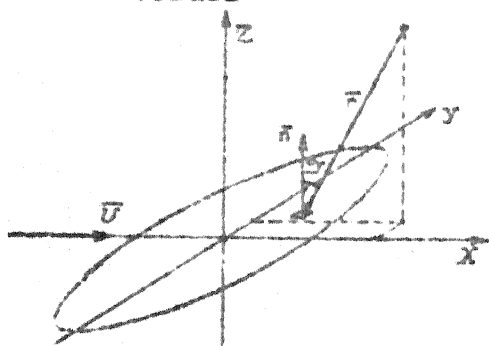
$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} = 0 \quad (78)$$

Volgens Greer is derhalve

$$\delta p = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\pi \cdot \delta p}{r} d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \delta p \cdot \pi \cdot \frac{1}{r} d\Omega \quad (79)$$

waarbij de integratie over de grensvlakken van het veld

de boven- en onderzijde van het draagvlak apart uit te strekken is. Daarbij levert de eerste integraal rechts wegens $\vec{n} \cdot \nabla \varphi = V_n$ en de continuïteit van V_n bij doorgang door het draagvlak de waarde nul. Daar verder



$\vec{n} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}$ is, wordt de tweede integraal, met $\mathcal{S}$ in overeenstemming met fig. 16 en met de afkorting

$$\Pi(x, y) = \delta p_{\text{onder}}(x, y) - \delta p_{\text{boven}}(x, y) \quad (80)$$

gelijk aan

$$\int \Pi \frac{\cos \mathcal{S}}{r^3} df,$$

waarbij de integraal thans éénmaal over het draagvlak uit te strekken is. Dus

$$\delta p = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Pi \frac{\cos \mathcal{S}}{r^3} df.$$

Anderszijds is volgens Bernoulli

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 = p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 = p + \frac{1}{2} \rho (\vec{U} + \vec{v})^2 \approx p + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho \vec{U} \cdot \vec{v}, \quad (81)$$

of, de snelheidspotentiaal φ invoerend, (wegens $\delta p = p - p_\infty$),

$$\delta p = -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (82)$$

Dit blijkt men te mogen integreren tot

$$\varphi = -\frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^x \delta p(\xi, y, z) d\xi = -\frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Pi \frac{\cos \mathcal{S}}{r^3(\xi, y, z)} df \quad (83)$$

Daar $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{z=0}$ het randwaardensysteem (37) der normaalsnelheden moet reproduceeren, vinden wij langs dezen weg formeel de integraalvergelijking

$$V_n = -\frac{1}{\rho U} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Pi \frac{\cos \mathcal{S}}{r^3(\xi, y, z)} df \right]_{z=0} \quad (84)$$

Het is niet gelukt, deze integraalvergelijking voor een willekeurig gegeven draagvlakcontour naar Π op te lossen. Zij vormt echter een geschikt aanknooppunt voor de ontwikkeling van benaderingsmethoden, die de nauwkeurigheid van de in de voorgaande paragraaf vermelde kunnen overtreffen. Daarbij zijn niet-onbevredigende resultaten bereikt, die ook voor draagvlakken van kleine spanwijdte nog een aannemelijke betrouwbaarheid vertoonen.

93 Ondanks alle mathematische moeilijkheden is het in twee bijzondere gevallen gelukt, voor de integraalvergelijking (84) een als exact op te vatten oplossing te construeeren. Deze gevallen worden gegeven door het cirkelvormige en door het elliptische draagvlak. In het eerste geval moet men het veld met behulp van bolcoördinaten beschrijven en reeksontwikkelingen naar bolfuncties invoeren, in het tweede gebruikt men elliptische coördinaten in combinatie met reeksontwikkelingen naar functies van Lamé. In beide gevallen stuit men op ernstige, echter oplosbaar bevonden mathematische moeilijkheden. Beide problemen zijn veel gecompliceerder dan de overeenkomstige potentiaalvraagstukken uit de theorie van het electrostatische veld.

94 Wanneer men in vervolg op het bovenstaande thans ook de compressibiliteit van de lucht in de theorie wenscht op te nemen, stuit men in het "subsone" geval op ernstige moeilijkheden. Van een systematische

*Aan de oplossing moet de gebruikelijke voorwaarde worden opgelegd, dat zich aan den achterrand geen singulariteit bevindt.

theorie kan op het oogenblik nog geen sprake zijn.

Is de strooming supersoon, dan is een enkel geval, nl. het geval van een driehoekigen, met den punt tegen de stroomingsrichting in wijzenden, vleugel, voor nader onderzoek toegankelijk. Het stroomingsveld is dan z.g. conisch en kan in wezen met behulp van 2 coördinaten worden beschreven. Uit een eenvoudige gelijkvormigheidsbeschouwing, gecombineerd met de wetenschap, dat de stroomafwaarts gelegen "basis" van den driehoek zijn aanwezigheid stroomopwaarts niet kan doen gevoelen volgt nl. dat de druk, snelheid, enz. in deze situatie langs iedere rechte door den top van den driehoek constant moeten zijn (althans in het stuk van het veld, waar de druk aan het oppervlak van den driehoek vanaf hangt). Hiervan gebruik makend, kan men de (overeenkomstig c en d van par.42 vereenvoudigde) grondvergelijkingen reduceeren tot een Laplace vergelijking in twee variabelen, waarna de ook reeds in par. 6 in het veld gebrachte hulpmiddelen der functietheorie in toepassing kunnen worden gebracht. Langs deze weg zijn in den laatsten tijd eenige resultaten bereikt.

10 Instationnaire draagvlaktheorie.

101 Wij willen thans de restrictie a van par.42 laten vervallen. Wij hebben reeds vermeld, dat het dan het harmonisch trillende draagvlak is, dat het meest belangwekkende geval vormt. Hierover bestaat een zeer omvangrijke literatuur en een in sommige opzichten ver uitgewerkte theorie. Door tusschenkomst van een Fourier-analyse dekt deze tevens de belangrijke andere gevallen van instationnaire beweging. De uitkomsten van het onderzoek vinden een hoogst belangrijke directe toepassing in berekeningen over de stabiliteit van het evenwicht van een elastischen, aan een luchtstrooming blootgestelden vliegtuigvleugel.

De meest volledig uitgewerkte theorie gaat uit van de overeenkomstig b, c, d en e van par.42 vereenvoudigde situatie. Eén der geschikt bevonden methoden van onderzoek sluit aan op die van par.82. De voornaamste complicatie is, dat er zich thans ook in het twee-dimensionale geval een "vrij" wervelvlak achter den vleugel bevindt. Dit vlak wordt, als steeds, overeenkomstig par.55 met het XY-vlak achter den vleugel geïdentificeerd. (In twee-dimensionale gevallen ligt de Z-as in de spanwijdterichting). De intensiteit der wervels worde gegeven door de functie $g(x)$, $-\infty \leq x$. Dan geldt voor de ter plaatse van het draagvlak geïnduceerde normaalsnelheid in stede van (67)

$$V_n(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(x, t) dx}{x - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x, t) dx}{x - \xi} \quad (85)$$

Daar alle vergelijkingen lineair zijn, is in het gegeven geval

$$V_n(\xi, t) = \mathcal{I}m \{ V_{n0}(\xi) e^{i\omega t} \}, \quad \gamma(x, t) = \mathcal{I}m \{ \gamma_0(x) e^{i\omega t} \}, \quad g(x, t) = \mathcal{I}m \{ g_0(x) e^{i\omega t} \}. \quad (86)$$

Zooals bekend is, kan men de operatoren $\mathcal{I}m$ tijdens de uitwerking weglaten, om ze eerst weer aan de uitkomsten toe te voegen.

Nu eischen de conserveeringswetten waaraan de wervels voldoen, dat

$$g(x, t) = g(x, t - \frac{x - \xi}{U}) \quad (87)$$

en verder neemt de formule (45) den vorm

$$g(x, t) = -\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, t) dx \quad (88)$$

aan. Uit (85), (86), (87) en (88) volgt de integraalvergelijking

$$V_{n0}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0(x)}{x - \xi} dx - \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x - \xi} dx, \quad (89)$$

waarin de afkorting

$$\omega = \frac{\nu}{U} \quad (90)$$

is opgenomen. Het linkerlid is een uit de gegeven trilling via (37)

af te leiden bekende functie van ξ . Aan de oplossing is de bijconditie

$\gamma_0(\xi)$ eindelijk

opgelegd.

De vergelijking is oorspronkelijk door reeksontwikkeling opgelost. Later is gebleken, dat de reeksen, die de oplossing representeren, sommerbaar zijn, waardoor aan de oplossing een gelaten integraalvorm kan worden gegeven. De oplossingen zijn van toepassing op willekeurige, mits kleine harmonische trillingen, waarbij de "skeletlijn" op willekeurige wijze mag vervormen. In het bijzonder dekt de theorie dus ook het geval van onafhankelijke roertrillingen.

102 De bovenstaande eenvoudige behandelingswijze kan desgewenscht worden vervangen door de methode van par.92. In het gestelde geval biedt dit geen voordeel. Desalniettemin is het vermogen van deze tweede werkwijze veel groter dan dat van de "wervelmethode". Dit blijkt, wanneer men één der veronderstellingen b of d laat vervallen. De methode van par.92 blijkt in beide gevallen nog bruikbaar te blijven, de wervelmethode echter uitsluitend in het eerste, drie-dimensionale doch incompressibele, geval. Zij is ook dan echter veel stroever dan de methode van par.92.

De op de vereischte wijze gegeneraliseerde methode van par.92 is derhalve in gecompliceerde gevallen zeker de meest doeltreffende, en soms de eenige die tot resultaten leidt. Deze resultaten hebben immer den vorm van integraalvergelijkingen, hoewel men deze eventueel in zekeren zin kan onzeilen door reeds in vroegere stadia der berekening met reeksontwikkelingen te opereeren.

De oplossing van het "compressibele twee-dimensionale" geval is langs dezen weg enkele jaren geleden aan een Nederlandschen mathematicus, (R.Timman), gelukt. Het uitgangspunt vormt de vergelijking (34). Transformeert men deze op elliptische coördinaten, dan kan zij gesepareerd worden en komt men bij de differentiaalvergelijking van Mathieu terecht. Derhalve moet men de oplossingen thans door benadering van reeksontwikkelingen naar functies van Mathieu construeeren.

Men lette erop, dat de elliptische coördinaten in het accentenvlak zijn gedefinieerd. Zij leveren eerst na het aanbrengen van de omkeering der Lorentz contractie kronlijnige coördinaten in het stroomingsveld.

Bij de uitwerking der berekening stuit men op enkele typische moeilijkheden, die van hetzelfde kaliber zijn als de in par.93 bedoelde.

Een complete numerieke uitwerking van de resultaten ontbreekt op het oogenblik nog.

103 Wanneer de snelheid U de geluidssnelheid overtreft, in het supersone geval dus, moet de vergelijking (34) door de hyperbolische vergelijking (35) worden vervangen. Deze oogenschiijnlijk kleine verandering vergemakkelijkt de mathematische behandeling aanzienlijk. Men komt door verdere uitwerking van de karakteristiekenmethode vrij snel tot een resultaat. Men kan ook gebruik maken van een omwerking van de tot een integraalvergelijking leidende methode van par.92. Deze omwerking is natuurlijk nogal fundamenteel, want men moet het door de vergelijking (79) gevormde uitgangspunt vervangen.

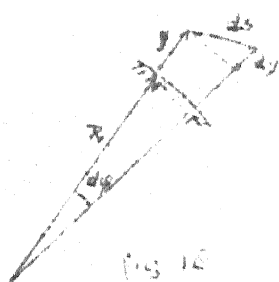
104 In het "drie-dimensionale incompressibele geval" zijn voor slanke draagvlakken eenige benaderingsoplossingen bekend, die aanknopen bij de uit de toepassing van de gegeneraliseerde methode van par.92 voortvloeiende integraalvergelijking. De mathematische behandeling is moeilijk, een geheel bevredigend resultaat is nog niet bereikt. Het probleem is op het oogenblik bij verschillende instituten, ook bij het N.L.L., in behandeling.

Neemt men thans nog aan, dat de met de viscositeit samenhangende krachten binnen de grenslaag van dezelfde orde van grootte worden als de traagheidskrachten, dan blijkt daarmee een basis geconstrueerd te zijn, die het mogelijk maakt aan alle termen van de op twee-dimensionale kronlijnige coördinaten getransformeerde grondvergelijkingen () en ()

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k v_k v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \left\{ \nabla^2 (v_i v_k + v_k v_i) \right\}, \quad i=1,2, \quad (92)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} v^k) = 0$$

een bepaalde orde van grootte toe te schrijven. De grenslaagtheorie berust thans op algeheele verwaarloozing van alle termen, die de domineerende orde van grootte niet halen. In het uitvoerig onderzochte, stationnaire incompressibele geval vindt men dan bij gebruik van coördinaten, die uitgaande van het in fig. 1 methoudig gedefinieerde stel φ, η via de relatie



$$dx = R d\eta$$

zijn bepaald (hetgeen leidt tot

$$g_{11} = (1 + \frac{\eta^2}{R^2})^2, \quad g_{22} = 1 \quad (93)$$

de vergelijkingen

$$v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}; \quad -\frac{v_2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (94)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Dit is dus het beroende stel grondvergelijkingen der "stationnaire incompressibele grenslaagtheorie". Het is zeer aanzienlijk veel eenvoudiger dan het oorspronkelijke "volledige" stel, doch toch nog immer in verband met zijn quadratisch type gecompliceerd genoeg. Een aanzienlijke vereenvoudiging ontstaat kennelijk als $R = \infty$, de wand dus niet gekrond is. Volgens de tweede vergelijking is er dan geen een centrifugaalkracht compenseerende component van den drukgradiënt; de druk blijft in een dergelijk geval langs een normaal van den wand constant.

Men realiseere, dat de (tangentele) wrijvingskracht, die door de strooming op den wand wordt uitgeoefend, bepaald wordt door de uitdrukking

$$\tau_w = \eta \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (95)$$

113 Een onder bepaalde voorwaarden aanvaardbare oplossingsmethode van de vergelijkingen (94) opereert met reeksuitdrukkingen (δ = grenslaagdikte)

$$v_2(\delta) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots \quad (96)$$

$$\psi = F_1 x + F_3 x^3 + F_5 x^5 + \dots; \quad F_n = F_n(y)$$

waarin $v_2(\delta)$ de als gegeven te beschouwen hoofdsnelheid aan den rand van de grenslaag is en ψ de volgens de laatste vergelijking (94) aanwezige stroomfunctie

$$\left(v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Men stuit uiteindelijk op een recurrent stel van oneindig veel gewone differentiaalvergelijkingen, waarvan de eerste quadratisch

en alle overige lineair zijn. De voortgezette uitwerking geschiedt geheel langs numerieke weg. Hierbij kunnen de laatstelijk in het buitenland ontwikkelde wonderroekmachines uitstekende diensten bewijzen.

114 Door in plaats van x en y als onafhankelijk variabelen de grootheden α en ψ in te voeren kan men de eerste vergelijking (94) onder bepaalde voorwaarden transformeren in

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\eta}{\delta} \sqrt{V_\infty^2(\delta) - z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}, \quad (97)$$

die van het "warmtegeleidingstype" is. Zij wordt gebruikt voor het onderzoek van het asymptotisch gedrag van de oplossingen van het stelsel (94).

115 In technische berekeningen wordt veelvuldig gebruik gemaakt van een andere, door Pohlhausen ontworpen, behandelingswijze van het grenslaagvraagstuk. Hierbij gaat men eenvoudig uit van een "graden" benadering voor het snelheidsverloop γ in de grenslaag, daarbij aannemend dat het voldoende is een zelfde type "profiel" in de van x afhankelijke grenslaagdikte te passen. Voor deze functie, γ , wordt vervolgens via een op de vergelijkingen (94) toegepaste integratie - die fysisch tot de "impulswet" leidt - een differentiaalvergelijking verkregen. Deze opnieuw niet lineaire vergelijking wordt met behulp van numerieke methoden opgelost.

116 Wanneer men ook bij grenslaagberekeningen rekening wil houden met de compressibiliteit van de lucht, worden de mathematische moeilijkheden natuurlijk weer groter. Veel is op dit gebied nog niet geprosteerd. Voor supersone stroomingssnelheden is er in dit geval een additionele moeilijkheid, die gelegen is in den invloed van de temperatuur op de viscositeit. Bij normale temperaturen bestaat deze invloed uit een verhoging van μ met 1% per drie graden Celsius temperatuurverhoging. Dit effect kan bij subsone snelheden worden verwaarloosd. Bij supersone snelheden is de hoeveelheid in de grenslaag ontwikkelde wrijvingswarmte echter zoo groot, dat temperatuurverhogingen van honderden graden zeer wel mogelijk zijn. (De huidtemperaturen van de met 5 à 6-voudige geluidssnelheid voortvliegende V 2 liepen plaatselijk op tot 675°C). Het is dan absoluut nodig de variatie van de viscositeit in rekening te brengen.

117 De geheele hierboven besproken grenslaagtheorie rust op de opvatting, dat de strooming in deze laag het door fig. 18 getypeerde laminaire karakter zal bezitten. Dit is niet noodzakelijk het geval. Er blijken ook stroomingsvormen te bestaan, die door het optreden van (aanvankelijk microscopische) onregelmatig verdeelde en fluctueerende wervels een hoogst onregelmatig karakter hebben. Men noemt zulke grenslaagstroomingen "turbulent". Van deze gecompliceerde stroomingstoestanden bestaat nog inner geen bevredigende mathematische theorie (hoewel vele pogingen daartoe gedaan zijn). Voor technische doeleinden is een op semi empirische basis rustende provisorische behandelingswijze beschikbaar.

Een mathematisch hoogst gecompliceerd en alle aanvallen lang weerstand geboden hebbend vraagstuk wordt gevormd door de voorwaarden, die de stabiliteit van den laminairen stroomingsvorm beheerschen. De wortel van dit probleem wordt gevormd door de volgende gewone, lineaire, doch desalniettemin zeer onplezierige differentiaalvergelijking

$$(U-c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi = -\frac{i\nu}{\alpha} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} c, \alpha : \text{const.} \\ U = U(x) \text{ gegeven} \end{array} \right. \quad (98)$$

Eerst in den allerlaatsten tijd is het gelukt, eenige behoorlijke resultaten te bereiken.

12 Slotbeschouwing.

Wij gelooven, in het voorgaande een exposé van de wiskundige structuur van de draagvlaktheorie te hebben gegeven, dat een vrij bevredigenden graad van volledigheid vertoont. Natuurlijk ontbreekt hier en daar nog wel iets. Wij hebben ons in den regel gehouden aan het primaire geval dat door den solitair vleugel in de onbegrensde "atmosfeer" wordt gevormd. Derhalve ontbreken beschouwingen over draagvlakcombinatie, bv. tweedekkersystemen, tandenvleugels, roosters van draagvlakken, enz. Verder is geen aandacht besteed aan de mogelijkheid, dat het stroomingsveld buiten het draagvlak begrensd kan zijn, hoewel hier wel problemen te vinden zijn, die voor de techniek beteekenis hebben. Men denke aan den "invloed" van den grond op de strooming om den vleugel van een startend of landend vliegtuig, of aan een vleugel die voor onderzoek in de gesloten meetsectie van een windtunnel is opgehangen.

Verder is afgezien van het bespreken van speciale, niet of nog niet tot een eenigermate systematische theorie uitgeyerkte onderzoekingen. Als zoodanig zouden bv. kunnen worden vermeld de pogingen om bepaalde tekortkomingen van de bestaande systematische theorieën te elimineeren door het opnemen van "doodwatergebieden" in het stroomingsveld.

Wij meenen, dat deze beperkingen aanvaardbaar zijn. Bovendien zouden wij, als wij ze niet hadden aangehouden, gedwongen zijn geweest om de geheele literatuur nauwkeurig door te zien, waarvoor de tijd ten eenenmale ontbrak. Om dezelfde reden ontbreken literatuurwijzingen. Verder hebben wij namen in den regel alleen dan genoemd, als zij onverbrekkelijk verbonden zijn aan in den tekst vermelde vergelijkingen, transformaties, functies, enz. . /ver

Toepassing der variatieanalyse bij de verwerking der uitkomsten van biologische proefnemingen.

Korte samenvatting van het onderwerp en een voorbeeld.

De aanraking van de biologie met de wiskunde ligt op de volgende gebieden der verwerking van waarnemings-uitkomsten:

- de vereffening van waarnemingsuitkomsten, het bepalen van een gemiddelde en het zoeken van een maat voor de afwijkingen van het gemiddelde, standaard-afwijking en middelbare (fout) afwijking;
- het vergelijken van twee gemiddelden met elkaar en het bepalen van een maat voor het verschil daartusschen (middelbare afwijking van het verschil);
- het verband tusschen de al of niet opzettelijk aangebrachte groei-factoren en de verkregen uitkomsten (correlatie);
- het in beeld brengen der gevonden correlaties (lijnvereffening);
- het vergelijken van de verkregen met de verwachte uitkomsten (chi-kwadraat toets).

De punten a en b zullen eerst kort worden besproken, omdat de formules voor de standaard-afwijking $\approx \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$

en de middelbare afwijking $\approx \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n(n - 1)}}$

later weer aan de orde komen.

Daarin zijn x de waarnemingen en is $\bar{x}$ het rekenkundig gemiddelde van n waarnemingen.

Voor het quotient $\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$ is nu de term variëans in gebruik. (Eng. "variance").

Wanneer twee rijen waarnemingen met elkaar worden vergeleken, is de middelbare afwijking van het verschil van die beide rijen: $m_v = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$, waarin m_1 en m_2 de middelbare afwijking van elke reeks afzonderlijk voorstellen. Zijn de middelbare afwijkingen gelijk, dan is dus $m_v = m\sqrt{2}$.

Of een verschil tusschen twee reeksen waarnemingen belangrijk kan worden genoemd, hangt af van de distributie van de waarnemingen om hun gemiddelde, uitgedrukt in de grootte der middelbare fout en van een conventie omtrent de toelaatbare grenzen daarvan.

Korte aanduiding der normale distributie (x-functie) en de abnormale (t-functie) distributie van waarnemingen.

In de huidige proeftechniek rangechikt men de verkregen gegevens zoo mogelijk in een orthogonaal schema.

x_{11}	x_{12}	x_{1m}	$S_{1.}$
x_{21}	x_{22}	x_{2m}	$S_{2.}$
x_{j1}	x_{j2}	x_{jm}	$S_{j.}$
$S_{.1}$	$S_{.2}$	$S_{.m}$	S

Fisher heeft hiervan de volgende identiteit opgesteld:

$(\bar{x}_{1.} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.1} - \bar{x}) + (x_{\lambda\mu} - \bar{x}_{\lambda.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x}) = x_{\lambda\mu} - \bar{x}$
 waarin $x_{\lambda\mu}$ zijn waarnemings-uitkomsten; $\bar{x}_{\lambda.}$ en $\bar{x}_{.1}$ de gemiddelden van rij en resp. kolommen; $\bar{x}$ het algemeen gemiddelde.

Deze identiteit moet in een vorm worden gebracht dat de leden ervan kunnen worden gebruikt als maat voor belangrijke verschillen tusschen rijen onderling en kolommen onderling. Door kwadratering en sommering vindt men:

$$\sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (x_{\lambda\mu} - \bar{x})^2 = \sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (\bar{x}_{\lambda.} - \bar{x})^2 + \sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (\bar{x}_{.1} - \bar{x})^2 + \sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (x_{\lambda\mu} - \bar{x}_{\lambda.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x})^2$$

Door nu elk lid te deelen door het aantal onafhankelijke verschillen (vrijheidsgraden) van de samenstellende elementen (waarnemingen rijen of kolommen) ontstaat voor elk lid de "varians". Deze aantallen vrijheidsgraden zijn resp.:

$$(m-1), (n-1), (m-1)(n-1)$$

Voor de berekeningen kunnen wij belangrijke vereenvoudiging bereiken door de leden van de identiteit wat om te werken.

Zoo is:

$$\sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (x_{\lambda\mu} - \bar{x})^2 = \sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M (x_{\lambda\mu})^2 - \frac{(\sum_{\lambda=1}^L \sum_{\mu=1}^M x_{\lambda\mu})^2}{m \cdot n}$$

Door rijen en kolommen te vervangen door "factoren" dus bepaalde behandelingswijzen van de stof die men onderzoekt (bemesting, behandeling met chemicaliën, phys. factoren of door parallellen, dat zijn rijen of kolommen die op gelijke wijze worden behandeld maar slechts in plaats verschillen), verandert het schema niet.

Door invoering der parallellen ontstaat een scheiding in een "systematisch" en een "toevals" gedeelte.

Teneinde de berekeningen overzichtelijk te maken zullen wij een voorbeeld met eenvoudige cijfers analyseren:

Factor.	par. A	par. B	SOM.
A_1	11	13	24
A_2	16	12	28
SOM.	27	25	52
B_1	9	12	21
B_2	15	13	28
SOM.	24	25	49
SS	51	49	100

Hieruit kan men door de parallellen samen te tellen een hulptabel maken, waarin alleen de factoren A en B (behandeling) voorkomen.

Factor	B_1	B_2	SOM.
A_1	24	28	52
A_2	21	28	49
SOM.	45	55	100

Daar wij moeten werken met de afwijkingen van het algemeen gemiddelde, maar de originele cijfers gebruiken, bepalen wij eerst de algemene correctieterm.

$$\frac{(\sum x)^2}{n} = \frac{110^2}{8} = 1250$$

$$\text{Totale kwadraatsom} = \sum (x - \bar{x})^2 = \frac{(\sum x)^2}{n} =$$

$$(11^2 + 13^2 + 16^2 + 12^2 + 9^2 + 12^2 + 15^2 + 12^2) - 1250 = 1284 - 1250 = 34.$$

$$\text{Parallellen} \frac{51^2 + 49^2}{4} - \text{Correctieterm} = 1250,5 - 1250 = 0,5.$$

$$\text{Behandeling} \frac{24^2 + 28^2 + 21^2 + 27^2}{2} - \text{Ct.} = 1265 - 1250 = 15,0$$

De hoofdanalyse is dus:

Factor.	Kwadraatsom	Vrijheids- graden.	Varsians.
Totaal	34	7	
Parallellen	0,5	1	0,5
Behandeling	15,0	3	5,0
Rest	18,5	3	6,17

De behandeling splitsen wij in de factoren A en B en een combinatie van die twee, welke de interactie wordt genoemd. Wij komen hierop straks terug.

$$\text{Factor A} = \frac{52^2 + 48^2}{4} - \text{Ct.} = 1252 - 1250 = 2,0$$

$$\text{Factor B} = \frac{45^2 + 55^2}{4} - \text{Ct.} = 1262,5 - 1250 = 12,5$$

$$\text{Rest} = \text{Interactie AB} = 15,0 - (2,0 + 12,5) = 0,5.$$

Het tweede gedeelte van de analyse wordt dus:

Factor.	Kwadraatsom.	Vrijheids- graden	Varsians.
A	2,0	1	2,0
B	12,5	1	12,5
Int. AB.	0,5	1	0,5

Nu zoeken wij bij elk der factoren A, B en AB de bijbehorende toevalsrest. Daarvoor moeten enige hulptabellen worden gemaakt, waarin de desbetreffende factor en het toevalselement voorkomen.

Factor.	par.a.	par.b.	Som.
A ₁	27	25	52
A ₂	24	24	48
Som.	51	49	100

en analyseeren deze als volgt:

Factor.	Kwadraatsom.	Vrijheidsgraden.	Varsians.
Totaal 1)	3,0	2	
A	2	1	
Par.	0,5	1	
A x par.	0,5	1	0,5

$$1) \text{ Totaal is in de kwadraatsom } \frac{27^2 + 25^2 + 24^2 + 24^2}{2} - \text{Ct.} = 3,0$$

en op dezelfde wijze uit:

Factor	par.a.	par.b.	Som
B ₁	20	25	45
B ₂	31	24	55
Som.	51	49	100

de analyse van de B-factor.

Factor	Kwadrantsom	Vrijheidsgraden	Varians.
Totaal 1)	15,5	3	
B.	12,5	1	
Par.	0,5	1	
B. x par.	2,5	1	2,5

1) Totaal is in de kwadrantsom $\frac{20^2 + 25^2 + 31^2 + 24^2}{4} - Ct. = 15,5$.

Nu is $Ab \times par = 18,5 - (0,5 + 2,5) = 15,5$. Deze had ook rechtstreeks kunnen worden berekend, maar deze berekening wordt hier kortheidshalve weggelaten.

Het derde deel der analyse is dus:

Factor	Kwadrantsom	Vrijheidsgraden	Varians.
A x par.	0,5	1	0,5
B x par.	2,5	1	2,5
AB x par.	15,5	1	15,5

Om na te gaan of de factoren A en B in de proef een belangrijk effect hebben gehad en of de interactie A x B belangrijk is geweest, deelen wij nu hun varians door die van resp. A x par; B x par en Ab x par. Dit quotient wordt getoetst aan de kantabellen van Fisher (de z-tabel) of aan die van Snedecor (de F-tabel). Wij gebruiken de laatste, de F-tabel, omdat deze het werken met natuurlijke logaritmen vermijdt. Het getal z is $\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, dus $\log z$ is het halve verschil der logaritmen van de beide varians, terwijl F het getal is, waarvan de $\log_{10}$ 2z is.

De kansdistributie van z is normaal en de integraal van de kansdifferentiaal $dW = F(z_1, n_1, n_2) dz$.

De volledige analyse wordt nu:

Factor	Kwadrantsom	Vrijheidsgraden	Varians	F.ber.	F.volgens tabel voor P= 0,05 P= 0,01	
Totaal	34,0	7				
Parallel	0,5	1	0,5			
Behandeling	15,0	3	5,0	0,81	9,28	29,46
Rest	18,5	3	6,17			
A.	2,0	1	2,0	4,0	161	4052
A x par.	0,5	1	0,5			
B.	12,5	1	12,5	5,0	161	4052
B x par.	2,5	1	2,5			
A x B	0,5	1	0,5	0,03	161	4052
Ab x par.	15,5	1	15,5			

Wij zien dat de berekende zekerheidscoëfficiënten verre achterblijven bij die welke vereischt worden om van belangrijke effecten te kunnen spreken.

De oorzaak hiervan is gelegen in den beperkten opzet van onzen proef, die voor de afzonderlijke factoren slechts één vrijheidsgraad overliet, terwijl de vereischte zekerheidscoëfficiënten bij dergelijke kleine monsters juist zeer hoog zijn.

Op het eerste gezicht zou men b.v. aan de factor B eenige beteekenis hebben toegekend; de analyse laat zulks echter niet toe.

Nu drukt de varians van A en B slechts een gemiddeld effect over de twee trappen uit en daarom is het nodig nog na te gaan of er inderdaad geen verschil tusschen deze beide trappen aanwezig is.

Dit is voor de sommen van A_1 en A_2 :

$$V^+ = (P = 0,05) = t_2(n-1) \sqrt{2 \times n \times S_{Ap}^2} = 2,447 \sqrt{2 \times 4 \times 0,5} = 4,9$$

$$V^{++} = (P = 0,01) = t_2(n-1) \sqrt{2 \times n \times S_{Ap}^2} = 3,707 \sqrt{2 \times 4 \times 0,5} = 7,4$$

Inderdaad is het verschil $52 - 48 = 4,0$ en dus niet belangrijk.
Voor de factor B geldt naar analogie:

$$V^+ = (P = 0,05) = t_2(n-1) \sqrt{2 \times n \times S_{Bp}^2} = 2,447 \sqrt{2 \times 4 \times 2,5} = 10,1$$

$$V^{++} = (P = 0,01) = t_2(n-1) \sqrt{2 \times n \times S_{Bp}^2} = 3,707 \sqrt{2 \times 4 \times 2,5} = 15,5$$

Het werkelijke verschil is $55 - 45 = 10$ en dus blijkt bij nadere analyse dat het toch juist belangrijk is, hoewel de hoge vereischte zekerheidscoëfficiënt hierop niet wees. Deze tegenspraak ontstaat daardoor dat wij met onze zekerheidscoëfficiënt in de "staarten" der abnormale distributie zitten.

Wij moeten nu nog de interactie op haar belangrijkheid toetsen. Eigenlijk is het in dit geval volmaakt overbodig daar de berekende zekerheidscoëfficiënt zeer laag is. Voldedigheidshalve behandelen wij dit toch even als voorbeeld.

In de hulptabel op blz. (10) gaande zien wij de volgende verschillen:

$$\text{Van } A_1B_1 \text{ naar } A_1B_2 = 28 - 24 = +4$$

$$\text{Van } A_1B_1 \text{ naar } A_2B_1 = 24 - 21 = -3$$

Rechtstreeks van A_1B_1
naar A_1B_2 gaande verwacht men dus

$$+1$$

$$\text{Echter vindt men } 27 - 24 = +3$$

Het verschil noemt men
de interactie

$$= +2$$

Deze interactie is belangrijk als zij is:

$$I^+ = (P = 0,05) = t_4(n-1) \sqrt{4 \times n \times S_{ABp}^2} = 2,776 \sqrt{4 \times 2 \times 15,5} = 28,5$$

$$I^{++} = (P = 0,01) = t_4(n-1) \sqrt{4 \times n \times S_{ABp}^2} = 4,604 \sqrt{4 \times 2 \times 15,5} = 47,0$$

waarin thans is het aantal eenheden waaruit elk der combinaties A_1B_1 , enz. is opgebouwd, hier dus 2.

Wij zien dat de berekende interactie (=2) verre van de belangrijkheid afblijft. Het zijn juist deze interacties, die in de biologie zeer veel belangstelling genieten.

Bij de uitbreiding van het aantal factoren en van de parallellen ontstaan uiteraard groote proeven. Nemen wij het experiment met 3 factoren in 3 trappen en het geheel in 3 parallellen dan zijn er $3^3 \times 3 = 81$ eenheden.

De analyse, uitgedrukt in vrijheidsgraden en vereischte zekerheidscoëfficiënten, ziet er nu als volgt uit: 1)

Factor	Kwdr.Som.	Vr. gr.	Var.	F.ber.	F vereischt voor P = 0,05 P = 0,01	
Totaal	-	80	-	-	-	-
Parallellen	-	2	-	-	-	-
Behandeling	-	26	-	-	1,69	2,10
Rest (beh. x par.)	-	52	-	-	-	-
A	-	2	-	-	6,94	18,00
A x par	-	4	-	-	-	-
B	-	2	-	-	6,94	18,00
B x par.	-	4	-	-	-	-
C	-	2	-	-	6,94	18,00

Inter.	Kndr. Som.	Vr. gr.	Var.	F. ber.	F. vereischt voor
C x par.	-	4	"	"	$\alpha = 0,05$ $P = 0,01$
A x B	-	4	"	"	3,84 7,01
A x B x par.	-	8	"	"	
A x C	-	4	"	"	3,84 7,01
A x C x par.	-	8	"	"	
B x C	-	4	"	"	3,84 7,01
B x C x par.	-	8	"	"	
A x B x C	-	8	"	"	2,59 3,89
A x B x C x par.	-	16	"	"	

Behalve de interacties A x B, A x C, B x C, die van de eerste orde zijn, treedt nu ook een interactie der tweede orde op n.l. A x B x C.

Met toeneming van het aantal factoren wordt dit aantal interacties zeer snel grooter. In de tot heden gepubliceerde verslagen van biologische experimenten konden zelden belangrijke interacties van een hogere orde dan twee worden berekend, maar er blijven natuurlijk mogelijkheden die van betekenis kunnen zijn.

Hoewel het rekenwerk met toeneming van den omvang der proef ook toeneemt, kan men dit altijd verantwoorden door te bedenken dat proefnemen als regel een kostbaar en tijdrovend werk is en dat eene methode die het cijfermateriaal diepgaand analyseert, hetgeen inderdaad met de varians analyse het geval is, altijd loont.

- 1) Vooropgesteld wordt dat de varians van de factor grooter is dan de varians van de bijbehorende interactie.